Supraconductivité dans un domaine à coins

Virginie BONNAILLIE-NOËL

avec M. Dauge, S. Fournais et G. Vial

IRMAR, Université Rennes 1 et ENS Cachan Bretagne

GDR MOAD

30 août 2007, Albi

Plan

1. Supraconductivité et théorie de Ginzburg-Landau

2. Modélisation mathématique

3. Problème spectral
   - Domaines modèles : plan, demi-plan, secteurs
   - Domaines réguliers
   - Polygones
   - Polygones curvilignes

4. Applications à l'apparition de la supraconductivité
   - Asymptotique du champ critique H_{C_3}
   - localisation de la supraconductivité

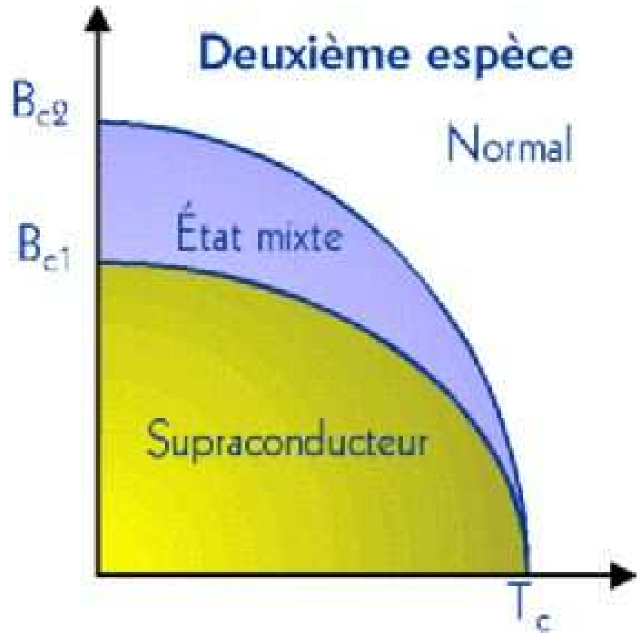
Supraconductivité et théorie de Ginzburg-Landau

Phénomène découvert en 1911.

- Maintenus à température très basse, les matériaux supraconducteurs laissent passer le courant sans dissipation d'énergie.

- Soumis à un champ magnétique extérieur suffisamment faible, le matériau repousse ce champ $\Rightarrow$ Effet Meissner (lévitation).

- En augmentant le champ appliqué, le flux magnétique pénétre l'objet par des vortex de plus en plus denses
$\Rightarrow$ état mixte.



Modélisation mathématique

Théorie de Ginzburg-Landau (1950) : paramètre d'ordre ψ
($|\psi|^2$ proportionnel à la densité des électrons supraconducteurs).

Échantillon supraconducteur de section Ω bornée, de caractéristique κ,
soumis à un potentiel magnétique $\mathcal{H} = H \operatorname{curl} \mathbf{F}$ avec $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(-x_2, x_1)$.
$H\mathbf{A}$ potentiel magnétique induit.

Énergie libre du matériau :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\kappa,H}[\psi, \mathbf{A}] = \int_\Omega \left\{ |(\nabla - i\kappa H\mathbf{A})\psi|^2 - \kappa^2|\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2}|\psi|^4 \right\} dx + \kappa^2 H^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{curl} \mathbf{A} - 1|^2 \, dx \,,}$$

Équations d'Euler-Lagrange

On note

$$\dot H^1_{\mathbf{F},\mathrm{div}} = \mathbf{F} + \dot H^1_{\mathrm{div}}\,, \qquad \dot H^1_{\mathrm{div}} = \{\mathbf{A} \in \dot H^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)\,\big|\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0\}\,.$$

Les minimiseurs $(\psi,\mathbf{A}) \in W^{1,2}(\Omega) \times \dot H^1_{\mathbf{F},\mathrm{div}}$ satisfont

$$-(\nabla - i\kappa H\mathbf{A})^2\psi = \kappa^2(1-|\psi|^2)\psi \quad \text{dans} \quad \Omega\,, \tag{1a}$$

$$\mathrm{curl}^2\mathbf{A} = \left\{-\frac{i}{2\kappa H}(\overline{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\overline{\psi}) - |\psi|^2\mathbf{A}\right\}1_\Omega(x) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2\,, \tag{1b}$$

$$(\nabla - i\kappa H\mathbf{A})\psi\cdot\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\,. \tag{1c}$$

Théorème. Pour tout $\kappa, H > 0$, la fonctionnelle $\mathcal{E}_{\kappa,H}$ a un minimiseur.

Pour κ fixé et H assez grand, l'unique solution est $(\psi,\mathbf{A}) = (0,\mathbf{F})$ [Giorgi-Phillips]

$\Rightarrow$ *la supraconductivité est détruite.*

Champ(s) critique(s) (introduit par Pan en 1999)

$$\underline{H}_{C_3}(\kappa) = \inf\{H > 0 \ : \ (0, \mathbf{F}) \text{ est un minimiseur de } \mathcal{E}_{\kappa,H}\} \ .$$

$$\overline{H}_{C_3}(\kappa) = \inf\{H > 0 \ : \ (0, \mathbf{F}) \text{ est l'unique minimiseur de } \mathcal{E}_{\kappa,H'} \text{ pour tout } H' > H\} \ .$$

Références: Bernoff-Sternberg, Fournais-Helffer, Helffer-Morame, Helffer-Pan, Jadallah, Lu-Pan, del Pino-Felmer-Sternberg, ...

But: asymptotique des champs critiques pour des domaines à coins
à l'aide de données spectrales provenant du problème linéaire
estimations de la localisation de la supraconductivité.

Problème spectral

Notations

Ω	domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^2$
$\mathcal{A}$	potentiel magnétique régulier
$\mathcal{B} = \operatorname{curl} \mathcal{A}$	champ magnétique associé à $\mathcal{A}$
h	paramètre semi-classique ($h \to 0$)

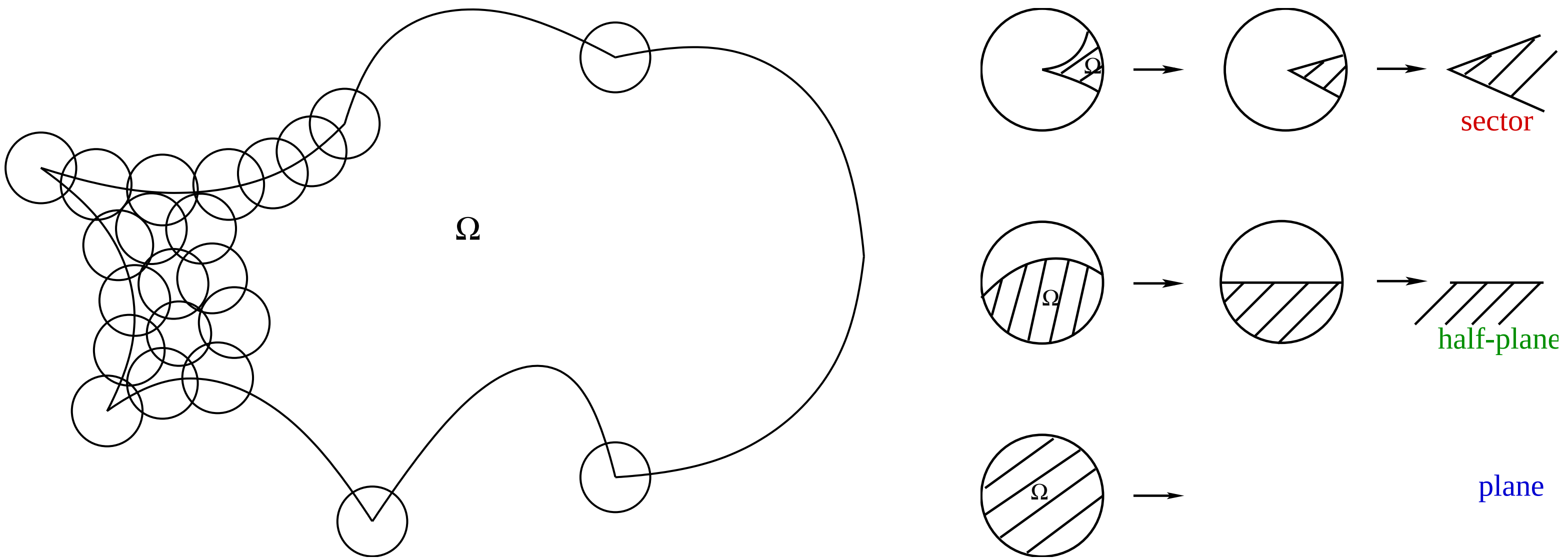
Hypothèse : $\mathcal{B} > 0$

P_h : réalisation de Neumann sur Ω pour l'opérateur de Schrödinger $-(h\nabla - i\mathcal{A})^2$
p_h : forme sesquilinéaire associée à P_h définie sur $H^1(\Omega)$ par

$$p_h(u,v) = \int_\Omega (h\nabla - i\mathcal{A})u(x) \cdot \overline{(h\nabla - i\mathcal{A})v(x)}\, dx$$

But : déterminer le comportement des modes propres $(\mu_{h,n}, u_{h,n})$ de P_h quand $h \to 0$

Opérateurs modèles



$\mathbf{F}(\mathsf{X}) = \frac{1}{2}(-\mathsf{X}_2, \mathsf{X}_1)$: potentiel magnétique à champ constant

$-(\nabla - i\mathbf{F})^2$ sur le plan, le demi-plan et les secteurs.

Plan et demi-plan

Proposition 1.

1. *La plus petite valeur propre de la réalisation de Neumann de* $-(\nabla - i\mathbf{F})^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *vaut* $\mathbf{1}$ *(Landau).*

2. *Le bas du spectre de* $-(\nabla - i\mathbf{F})^2$ *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ *vaut* $\boldsymbol{\Theta_0} \simeq 0.59$ *(Dauge-Helffer, 1993; Bolley-Helffer, 1993).*

Applications aux domaines réguliers pour $\mathcal{B} > 0$

Bernoff-Sternberg (1998), Helffer-Morame (96, 01), Lu-Pan (99, 00), del Pino-Felmer-Sternberg (00), Helffer-Pan (03), Fournais-Helffer (05, 06)

$$\frac{\mu_{h,1}}{h} \to \Theta_0 \text{ quand } h \to 0$$

Sous des hypothèses de simplicité,
$u_{h,1}$ se concentre à l'échelle $\sqrt{h}$ aux points de courbure maximal quand $h \to 0$

Pour $\mathcal{B} = 1$, asymptotique de $\mu_{h,n}$, estimation de la décroissance de $u_{h,n}$,

détermination du champ critique $H_{C_3}(\kappa)$, localisation des électrons supraconducteurs

$$H_{C_3}(\kappa) = \underline{H}_{C_3}(\kappa) = \overline{H}_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Theta_0} + \mathcal{O}(1) \text{ quand } \kappa \to +\infty.$$

Secteur de $\mathbb{R}^2$

$\mathsf{X} = (\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2)$ coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^2$

$$G^\alpha = \{\mathsf{X} \in \mathbb{R}^2, \mathsf{X}_1 > 0, 0 < \mathsf{X}_2 < \mathsf{X}_1 \tan\alpha\}$$

Soit Q^α la réalisation de Neumann de $-(\nabla - i\mathbf{F})^2$ sur G^α

$$Q^\alpha = -\Delta + i(\mathsf{X}_1\partial_{\mathsf{X}_2} - \mathsf{X}_2\partial_{\mathsf{X}_1}) + \frac{1}{4}|\mathsf{X}|^2$$

$\mu_k(\alpha)$: k-ème plus petit élément du spectre de Q^α

Quart de plan : Jadallah (01), Pan (02)

Spectre de Q^α [BN 2004]

1. **Bas du spectre**

   Le bas du spectre essentiel de Q^α vaut Θ_0.

   Pour tout $\alpha \in (0, \pi/2]$, $\mu_1(\alpha) < \Theta_0$.

   $\alpha \in (0, 2\pi)$, $K_\alpha :=$ **le plus grand entier tel que** $\mu_{K_\alpha}(\alpha) < \Theta_0$

2. **Décroissance des fonctions propres**

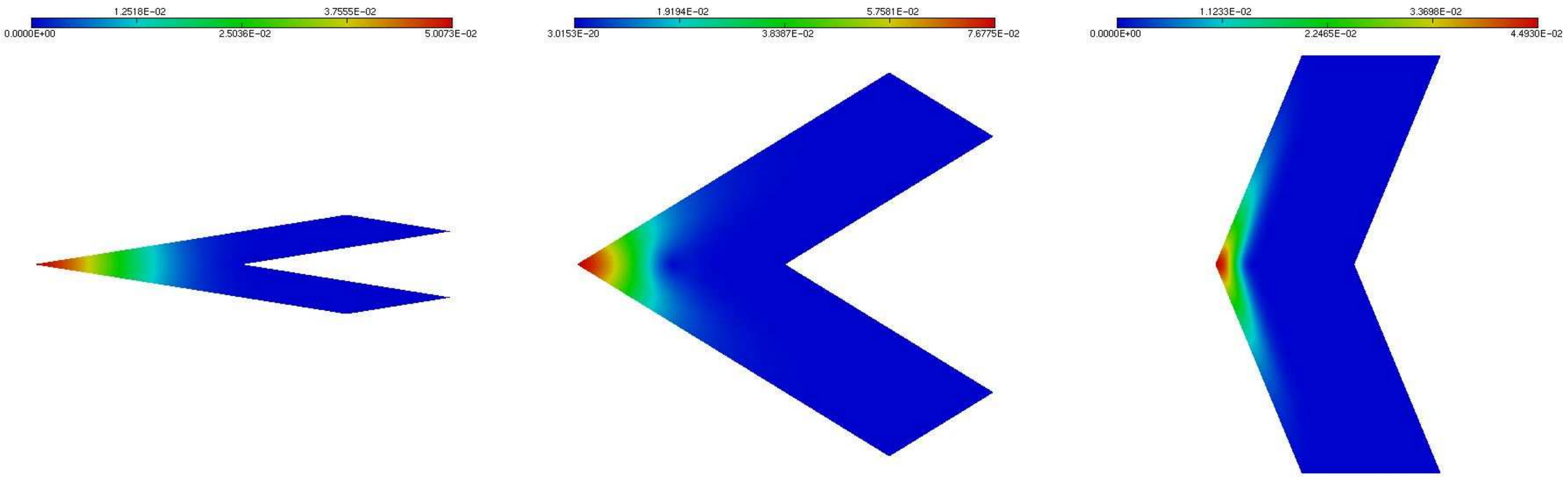
   Soit $\alpha > 0$ tel que $K_\alpha > 0$. Soit $0 < k \leq K_\alpha$ et Ψ_k^α une fonction propre normalisée associée à $\mu_k(\alpha)$. Alors

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists C_{\epsilon,\alpha} : \left\| e^{\left(\sqrt{\Theta_0 - \mu_k(\alpha)} - \epsilon\right)|\mathsf{X}|} \Psi_k^\alpha(x) \right\|_{\mathcal{V}(q^\alpha)} \leq C_{\epsilon,\alpha}$$

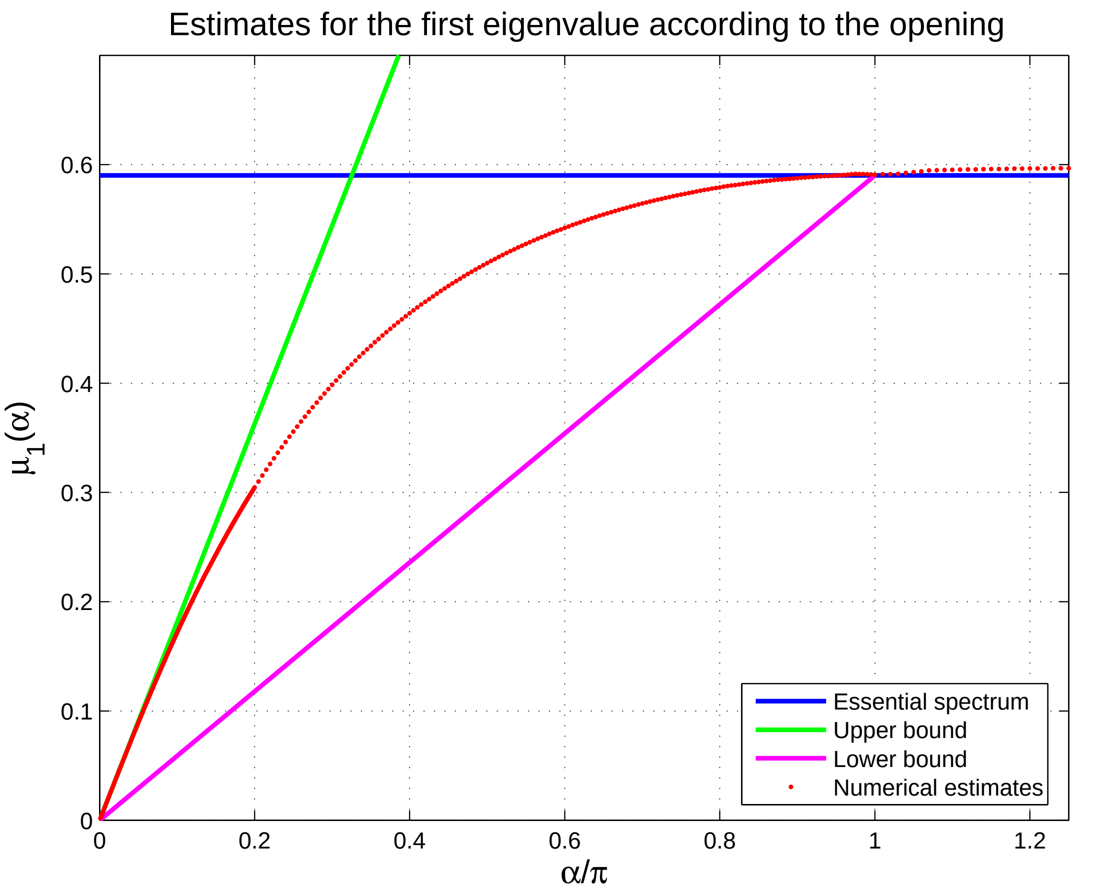
avec $||u||^2_{\mathcal{V}(q^\alpha)} = ||u||^2_{L^2(G^\alpha)} + ||(\nabla - i\mathbf{F})u||^2_{L^2(G^\alpha)}$.

Simulations numériques

Modules de la première fonction propre pour différents angles



Estimations numériques du bas du spectre



Conjecture : μ_1 croît de $(0, \pi]$ vers $(0, \Theta_0]$, vaut Θ_0 sur $[\pi, 2\pi)$

Opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant dans un domaine polygonal

(avec M. Dauge, IRMAR)

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathbf{F}}$$

Construction de quasi-modes

Ω	polygone convexe	Σ	ensemble des sommets s de Ω
α_{s}	angle en s	$G^{\alpha_{\mathsf{s}}}$	secteur de $\mathbb{R}^2$ d'ouverture α_{s}

Soit $\mathsf{s} \in \Sigma$ et $k \geq 1$ tels que $\mu_k(\alpha_{\mathsf{s}}) < \Theta_0$

$\Psi_k^{\alpha_{\mathsf{s}}}$ une fonction propre normalisée de $Q^{\alpha_{\mathsf{s}}}$ sur $G^{\alpha_{\mathsf{s}}}$ pour $\mu_k(\alpha_s)$

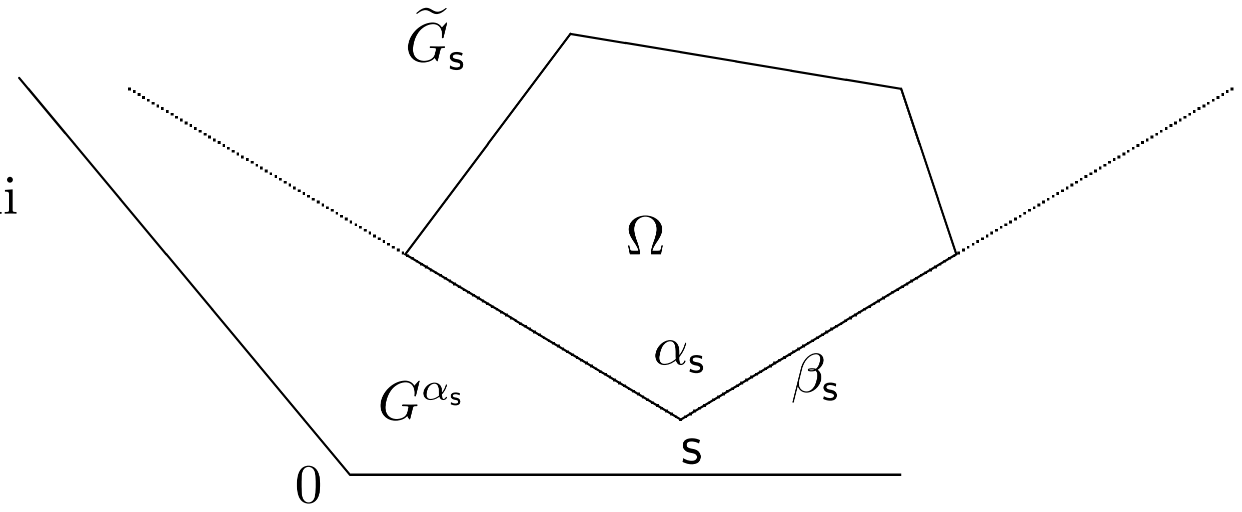
Scaling

$X = \dfrac{x}{\sqrt{h}}$ pour relier $Q^{\alpha_{\mathsf{s}}} = -(\nabla - i\mathbf{F})^2$ et $P_h = -(h\nabla - i\mathbf{F})^2$ sur $G^{\alpha_{\mathsf{s}}}$

$$x \longmapsto \Psi_k^{\alpha_s}\left(\frac{x}{\sqrt{h}}\right)$$ fonction propre de P_h sur $G^{\alpha_{\mathsf{s}}}$ associée à $h\mu_k(\alpha_{\mathsf{s}})$

Translation et rotation

pour envoyer $G^{\alpha_{\mathsf{s}}}$ sur $\widetilde{G}_{\mathsf{s}} \cap \Omega$ qui coïncide avec Ω autour de s



$$\widetilde{\psi}_{h,\mathsf{s},k}(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \exp\left(\frac{i}{2h} x \wedge \mathsf{s}\right) \Psi_k^{\alpha_{\mathsf{s}}}\left(\frac{\mathcal{R}_{\mathsf{s}}(x - \mathsf{s})}{\sqrt{h}}\right)$$ fonction propre de P_h sur $\widetilde{G}_{\mathsf{s}}$

$\boxed{\textbf{Cut-off}}$

Pour chaque sommet $\mathsf{s} \in \Sigma$, on note ρ_{s} la distance aux autres sommets :

$$\rho_{\mathsf{s}} = \operatorname{dist}(\mathsf{s}, \Sigma \setminus \{\mathsf{s}\})$$

Fonction de troncature : $\chi_{\mathsf{s}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin B(\mathsf{s}, \rho_{\mathsf{s}}) \\ 1 & \text{si} \quad x \in B(\mathsf{s}, \rho') \text{ avec } \rho' < \rho_{\mathsf{s}} \end{cases}$

$\boxed{\textbf{Quasi-mode défini sur } \Omega}$

$$x \longmapsto \psi_{h,\mathsf{s},k}(x) = \chi_{\mathsf{s}}(x)\, \widetilde{\psi}_{h,\mathsf{s},k}(x)$$

Propriétés des quasi-modes

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C_ε tel que

Norme :

$$\left|1 - ||\psi_{h,\mathsf{s},k}||^2\right| \leq C_\varepsilon \exp\left(-2\,\frac{\rho'\sqrt{\Theta_0 - \mu_k(\alpha_{\mathsf{s}})} - \varepsilon}{\sqrt{h}}\right)$$

Quotient de Rayleigh :

$$\left|\frac{p_h(\psi_{h,\mathsf{s},k}, \psi_{h,\mathsf{s},k})}{||\psi_{h,\mathsf{s},k}||^2} - h\mu_k(\alpha_{\mathsf{s}})\right| \leq C_\varepsilon \exp\left(-2\,\frac{\rho'\sqrt{\Theta_0 - \mu_k(\alpha_{\mathsf{s}})} - \varepsilon}{\sqrt{h}}\right)$$

Approximation de l'équation du mode propre :

$$||P_h\psi_{h,\mathsf{s},k} - h\mu_k(\alpha_{\mathsf{s}})\psi_{h,\mathsf{s},k}|| \leq C_\varepsilon \exp\left(-\,\frac{\rho'\sqrt{\Theta_0 - \mu_k(\alpha_{\mathsf{s}})} - \varepsilon}{\sqrt{h}}\right)$$

Estimations tubulaires des valeurs propres

- $\mu_{h,n}$ la n-ème valeur propre de P_h répétée selon la multiplicité

- λ_n la n-ème valeur propre de $\bigoplus\limits_{s\in\Sigma} Q^{\alpha_{\mathsf{s}}}$ répétée selon la multiplicité

- K_Ω le plus grand entier tel que $\lambda_{K_\Omega} < \Theta_0$ $(K_\Omega = \sum_{\mathsf{s}\in\Sigma} K_{\alpha_{\mathsf{s}}})$

- Soit $n \leq K_\Omega$, $\Sigma_n = \left\{\mathsf{s} \in \Sigma,\ \ \lambda_n \text{ est une valeur propre de } Q^{\alpha_{\mathsf{s}}}\right\}$

- $r(\lambda_n) = \min_{\mathsf{s}\in\Sigma_n} d(\mathsf{s}, \Sigma \setminus \{\mathsf{s}\})$

Théorème 2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C_ε t. q.*

$$\mu_{h,1} \leq h\lambda_1 + C_\varepsilon \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{h}}\left(r(\lambda_1)\sqrt{\Theta_0 - \lambda_1} - \varepsilon\right)\right)$$

$$|\mu_{h,n} - h\lambda_n| \leq C_\varepsilon \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{h}}\left(r(\lambda_n)\sqrt{\Theta_0 - \lambda_n} - \varepsilon\right)\right),\ \forall n \leq K_\Omega$$

Estimations des clusters d'espaces propres

Répétitions dans $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_{K_\Omega}\} \Rightarrow$ regroupement des $\mu_{h,n}$ en clusters

- $(\mu_{h,n}, u_{h,n})$ le n-ème mode propre de P_h

- $\{\Lambda_1 < \ldots < \Lambda_M\}$ l'ensemble des valeurs distinctes de $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{K_\Omega}\}$

- Soit $m \leq M$
  m-ème cluster d'espaces propres pour P_h:

$$F_{h,m} = \mathrm{span}\{u_{h,n} \text{ pour tout } n \text{ t. q. } \lambda_n = \Lambda_m\}$$

- Cluster de quasi-modes correspondant ($\chi_{\mathsf{s}} = 1$ sur $B(\mathsf{s}, r(\Lambda_m) - \delta)$):

$$E_{h,m} = \mathrm{span}\{\psi_{h,\mathsf{s},k} = \chi_{\mathsf{s}}\widetilde{\psi}_{h,\mathsf{s},k} \text{ pour tout } \mathsf{s} \in \Sigma,\ k \geq 1 \text{ t. q. } \mu_k(\alpha_s) = \Lambda_m\}$$

Théorème 3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C_ε t. q.*

$$d(E_{h,m}\,;\,F_{h,m}) \leq C_\varepsilon \exp\left(-\frac{(r(\Lambda_m) - \delta)\sqrt{\Theta_0 - \Lambda_m} - \varepsilon}{\sqrt{h}}\right),\ \forall m \leq M$$

où $d(E, F) = ||\Pi_E - \Pi_F \Pi_E||_{\mathcal{H}}$ avec Π_E la projection orthogonale sur E

Simulations numériques

(avec M. Dauge, D. Martin et G. Vial, IRMAR)

Structure 2 échelles :

1. une couche au coin à l'échelle $\sqrt{h}$,
2. un terme oscillant à l'échelle h.

$\Rightarrow$ méthode d'éléments finis d'ordre élevé ($\mathbb{Q}_{10}$).

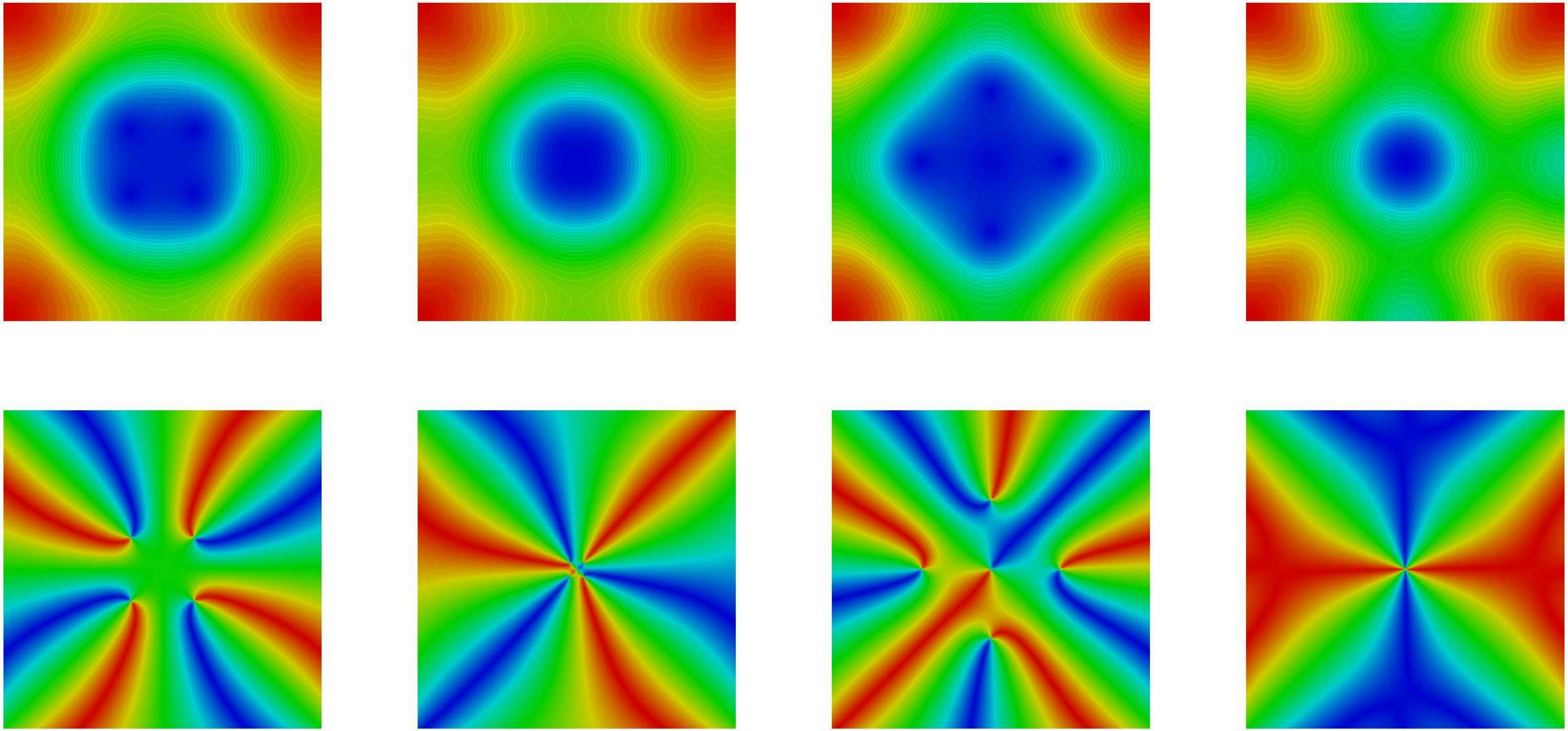
Calcul des modes propres avec le code MELINA

Sur un carré

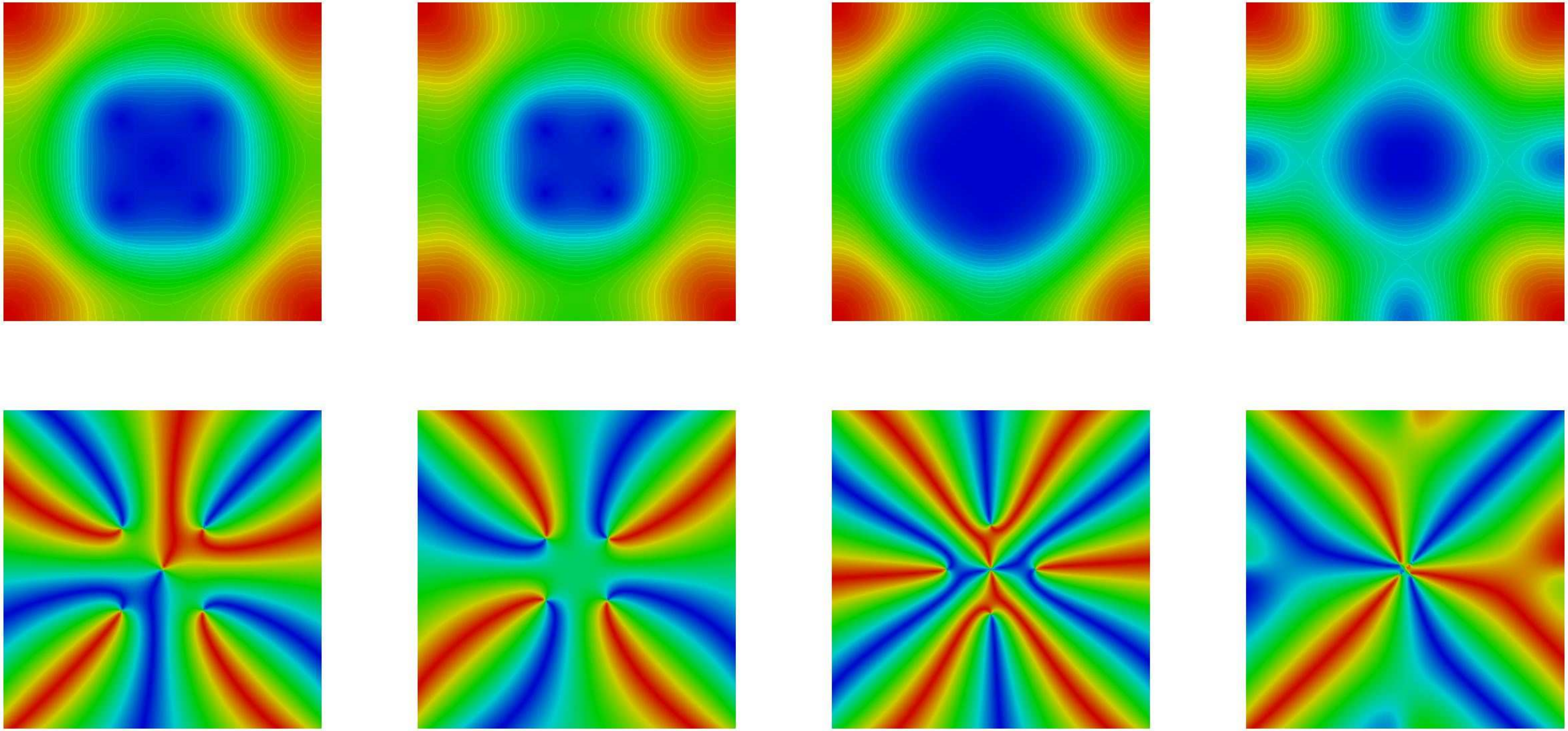
$\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \simeq 0.509905$
$\Theta_0 \simeq 0.59010$

Carré

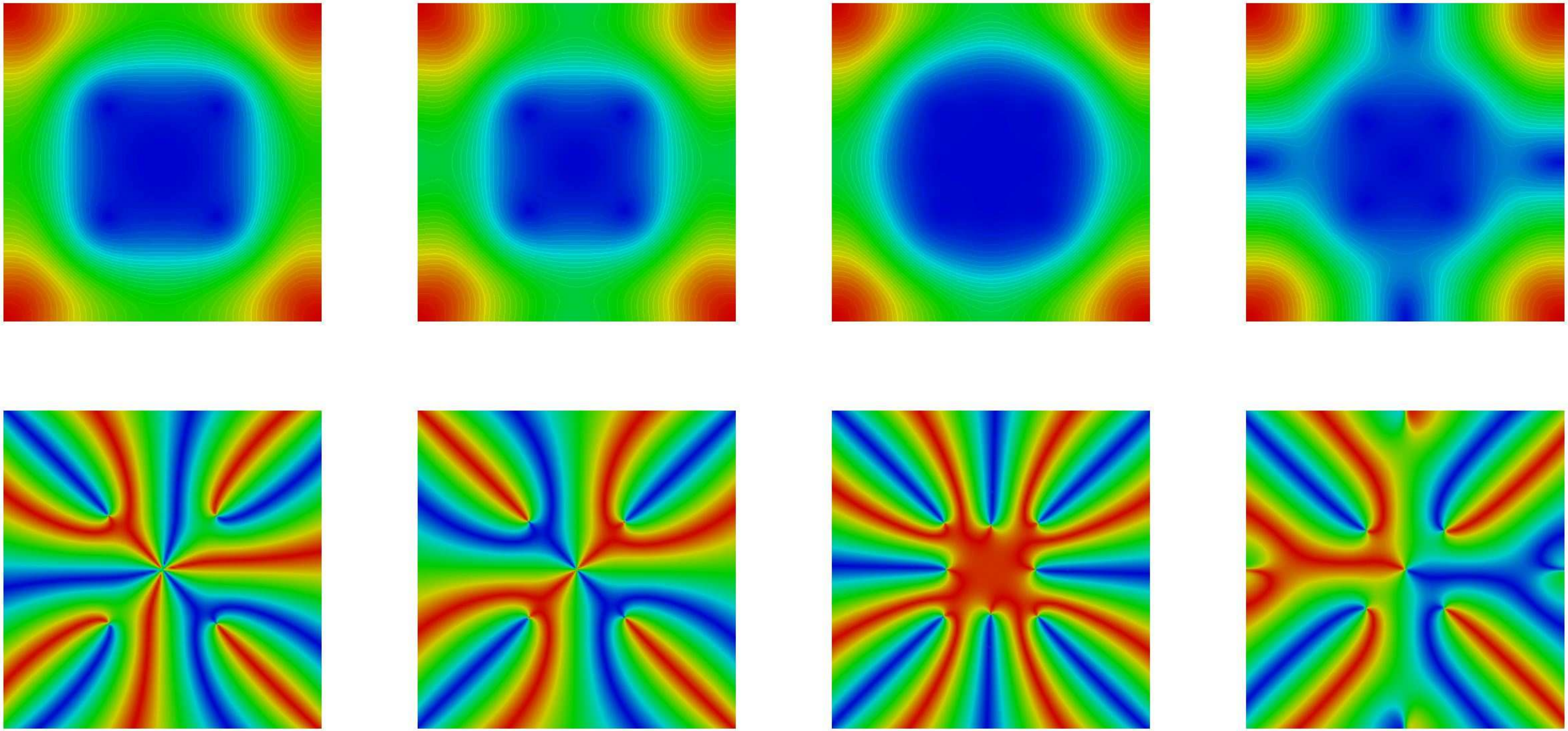
Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.1$



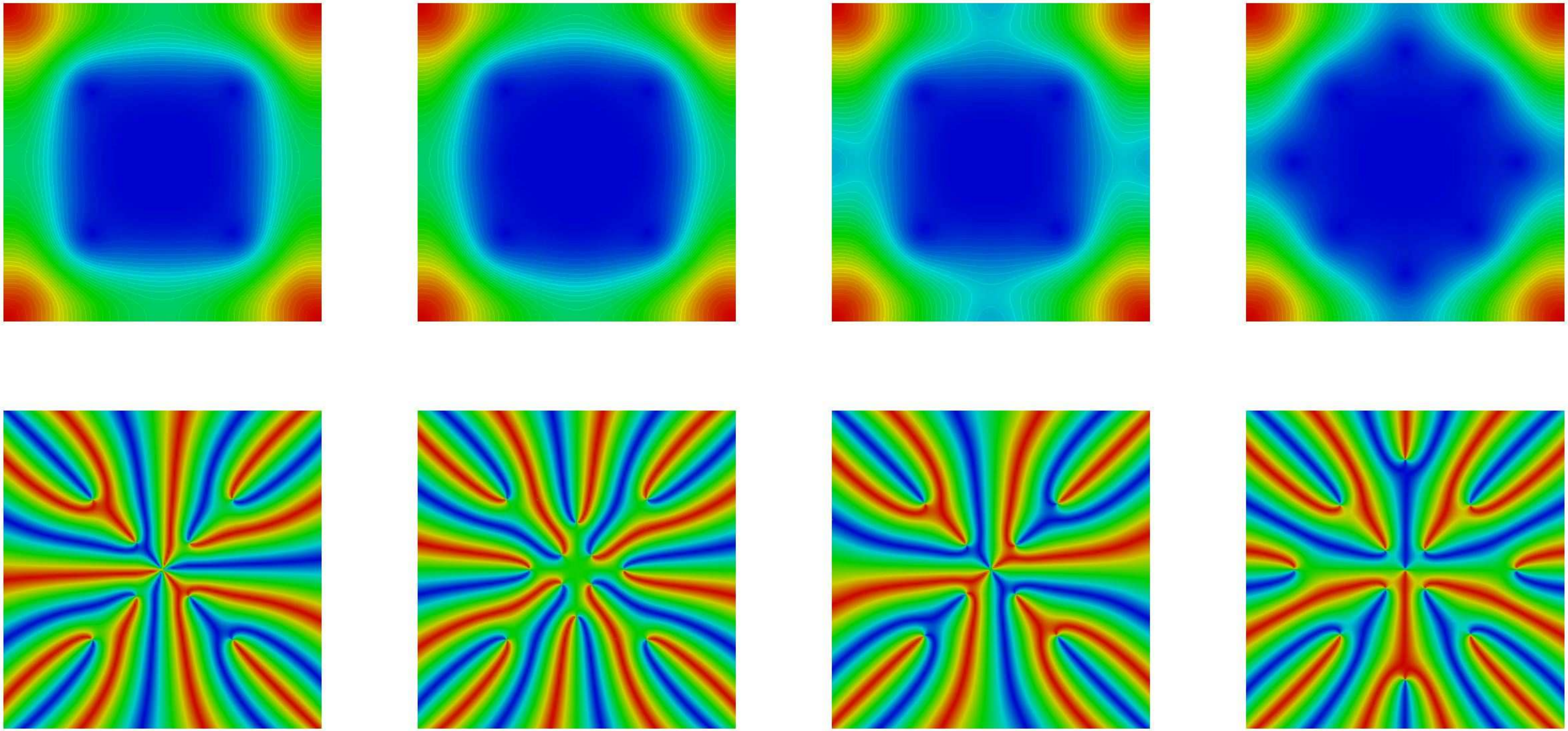
Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.08$



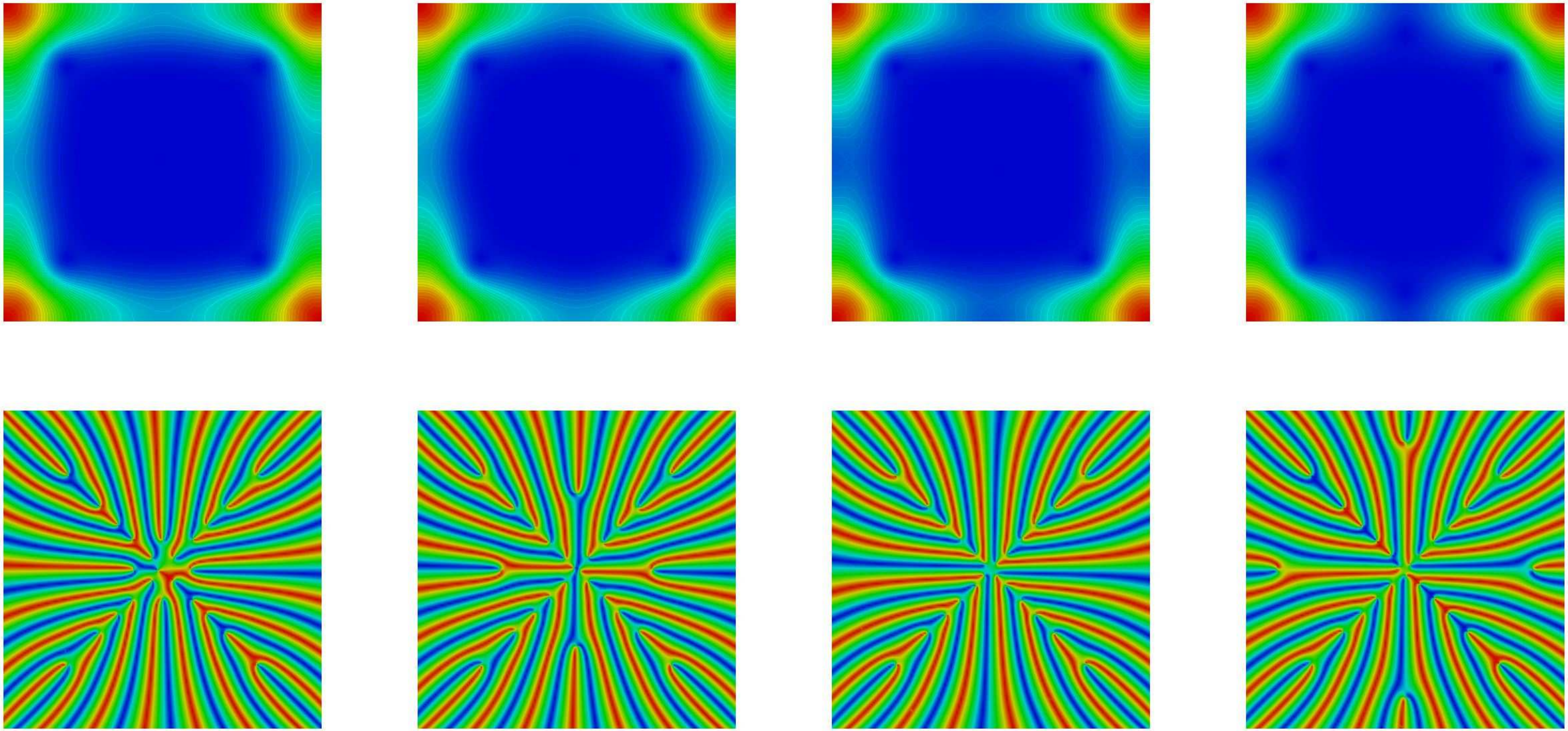
Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.06$



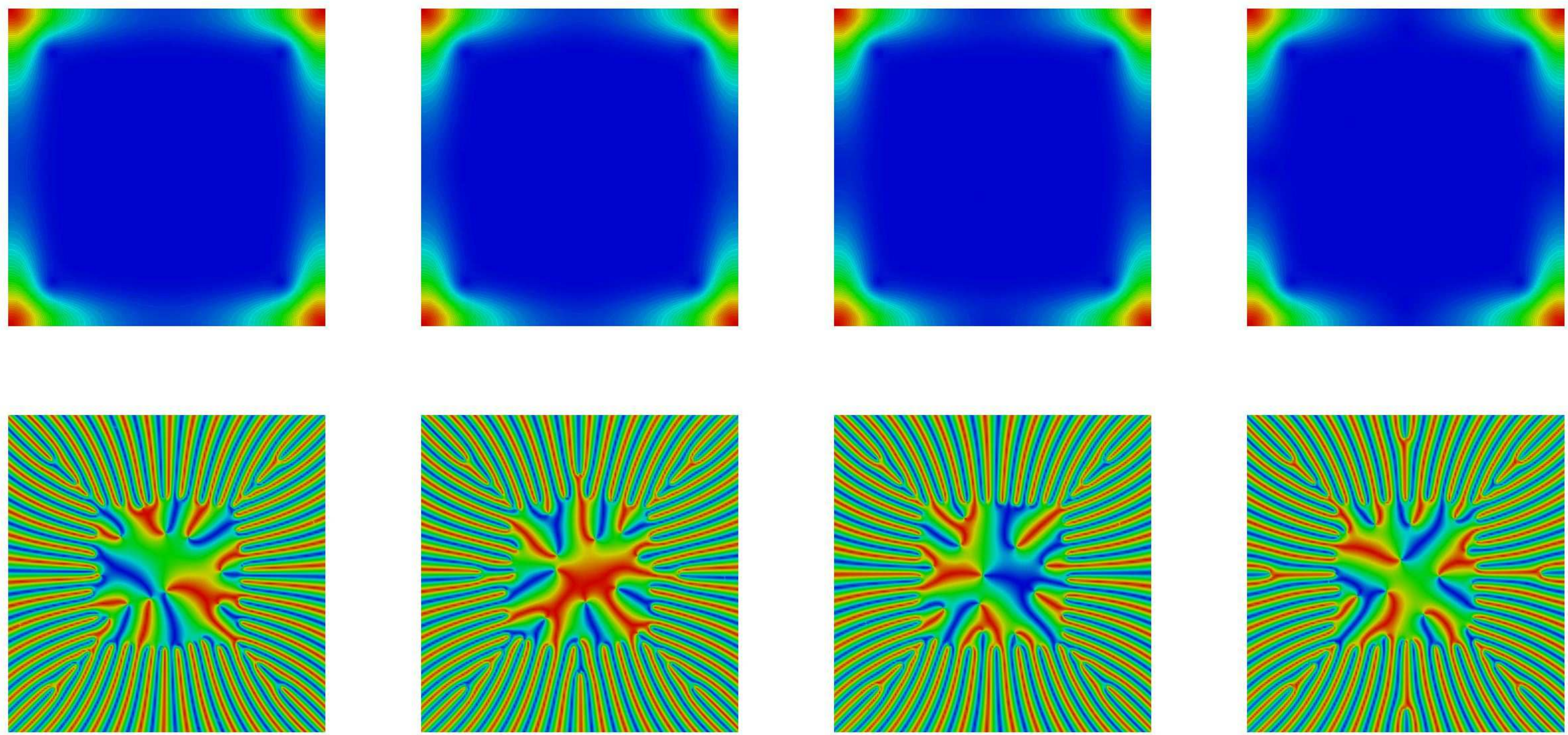
Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.04$



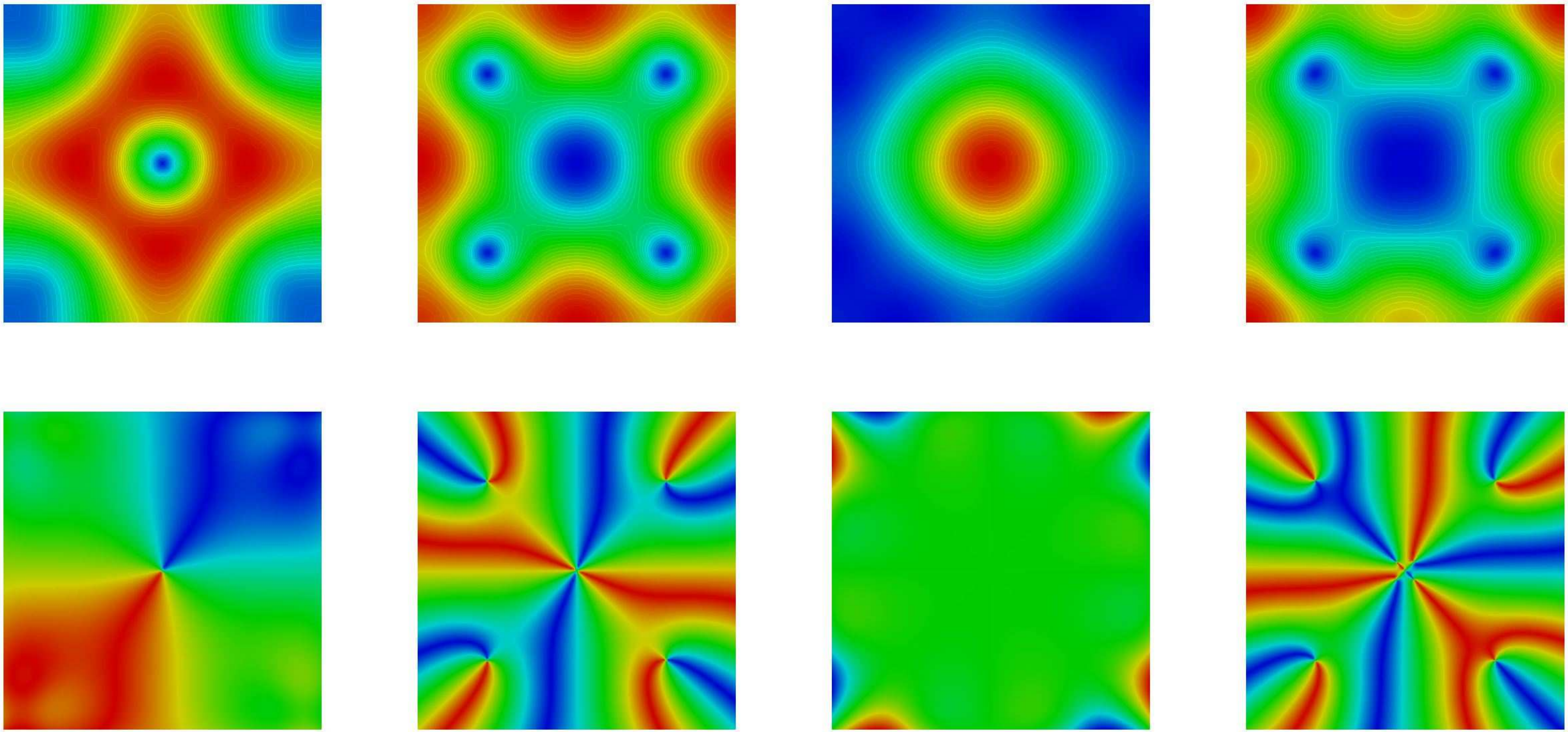
Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.02$



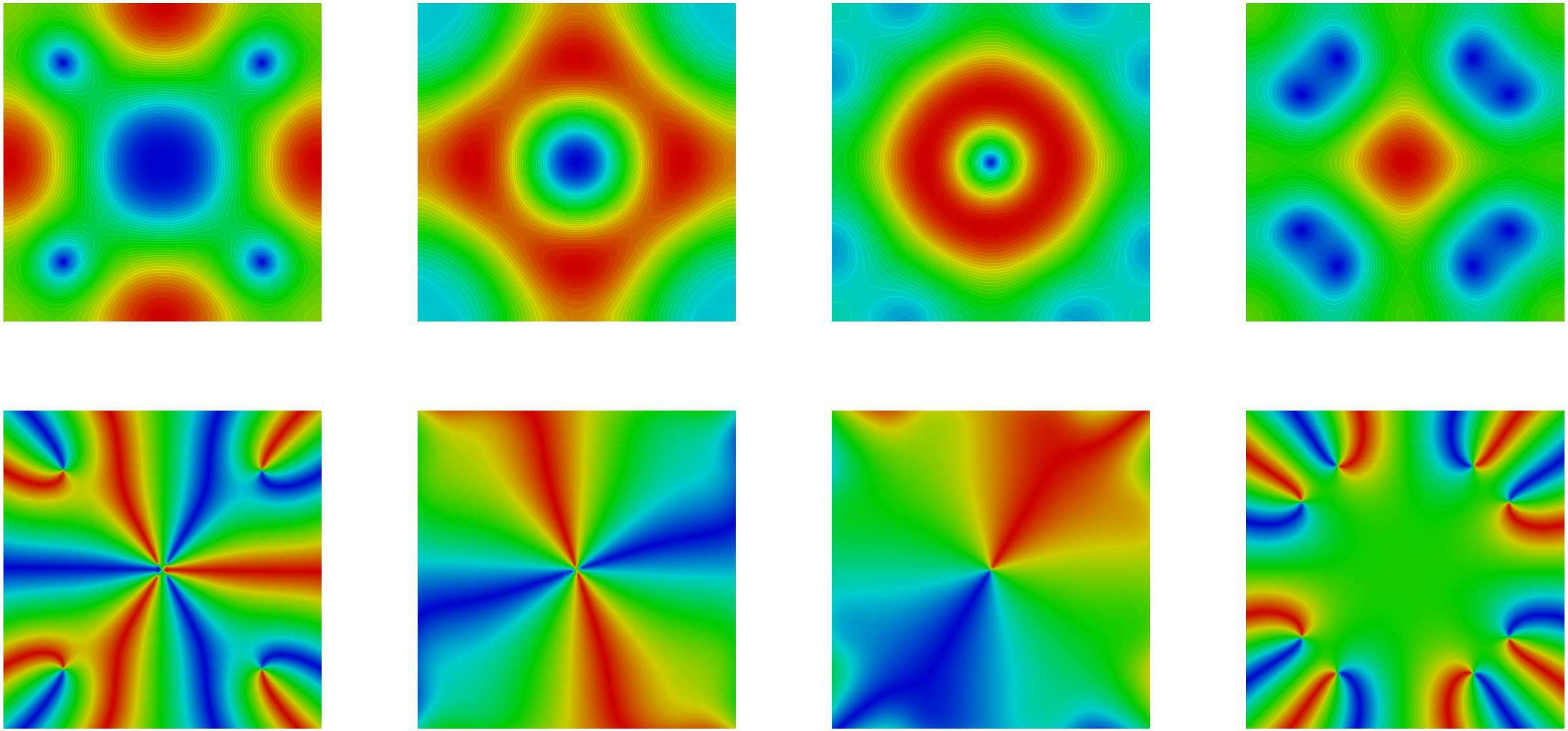
Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.01$



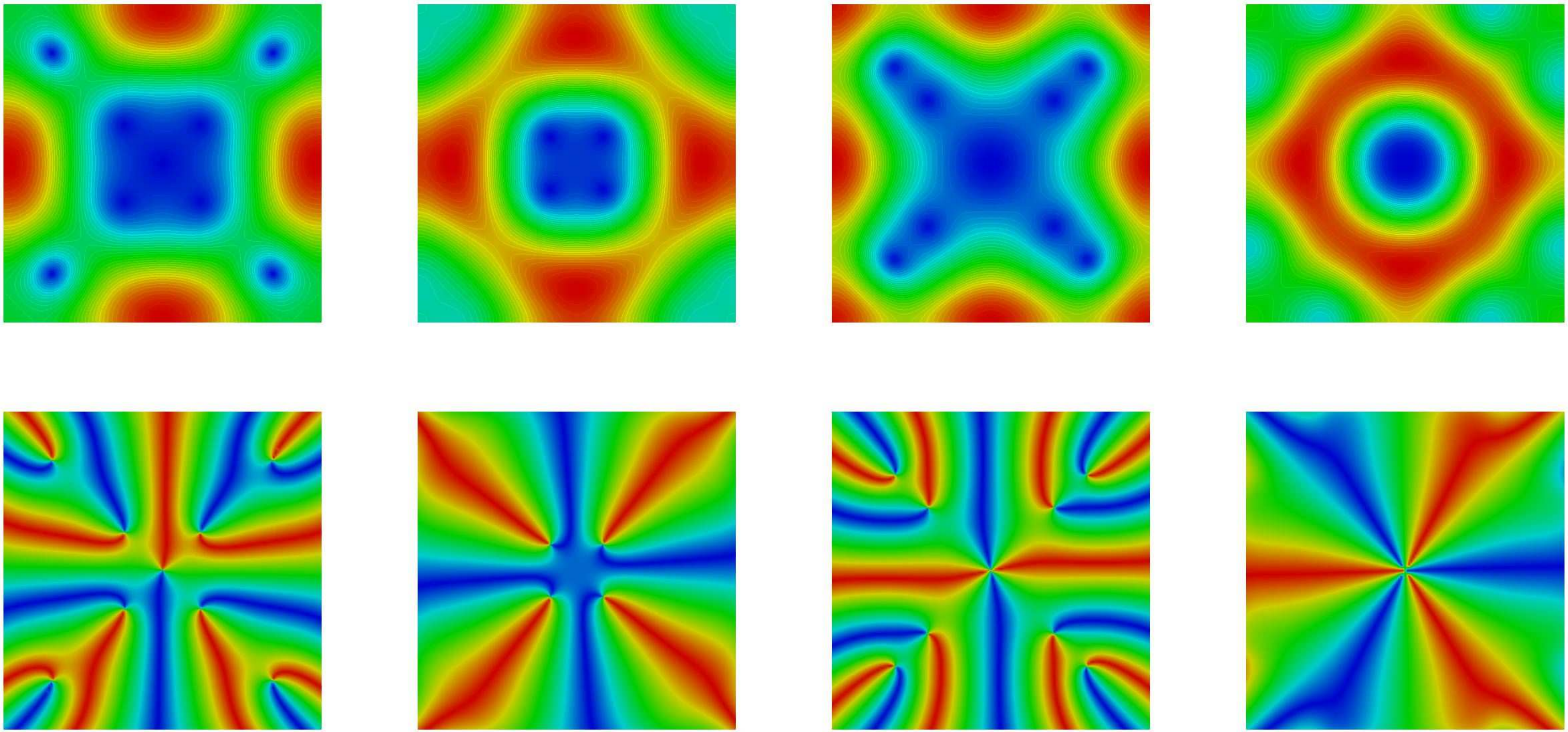
Modules et phases des fonctions propres 5-8, $h = 0.1$



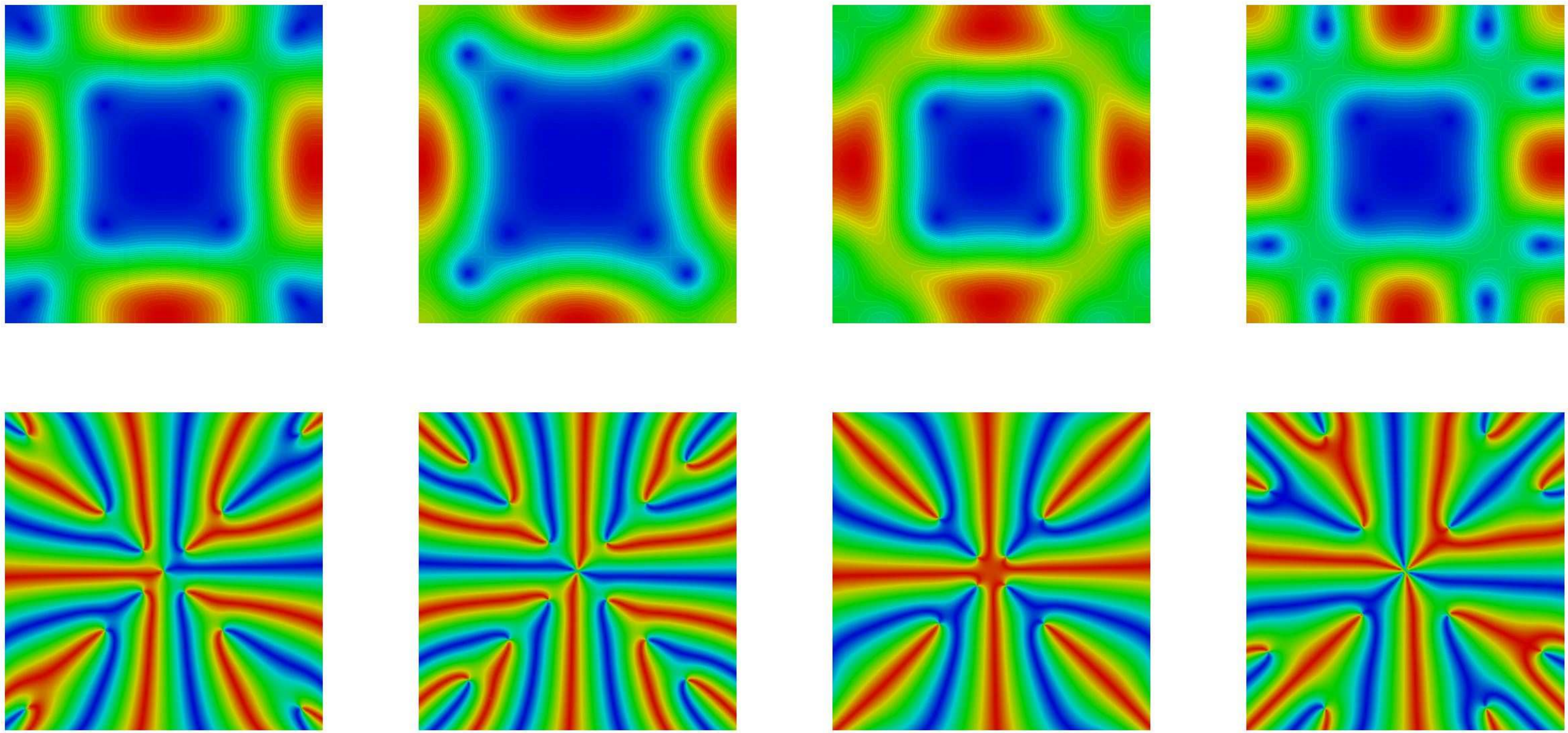
Modules et phases des fonctions propres 5-8, $h = 0.08$



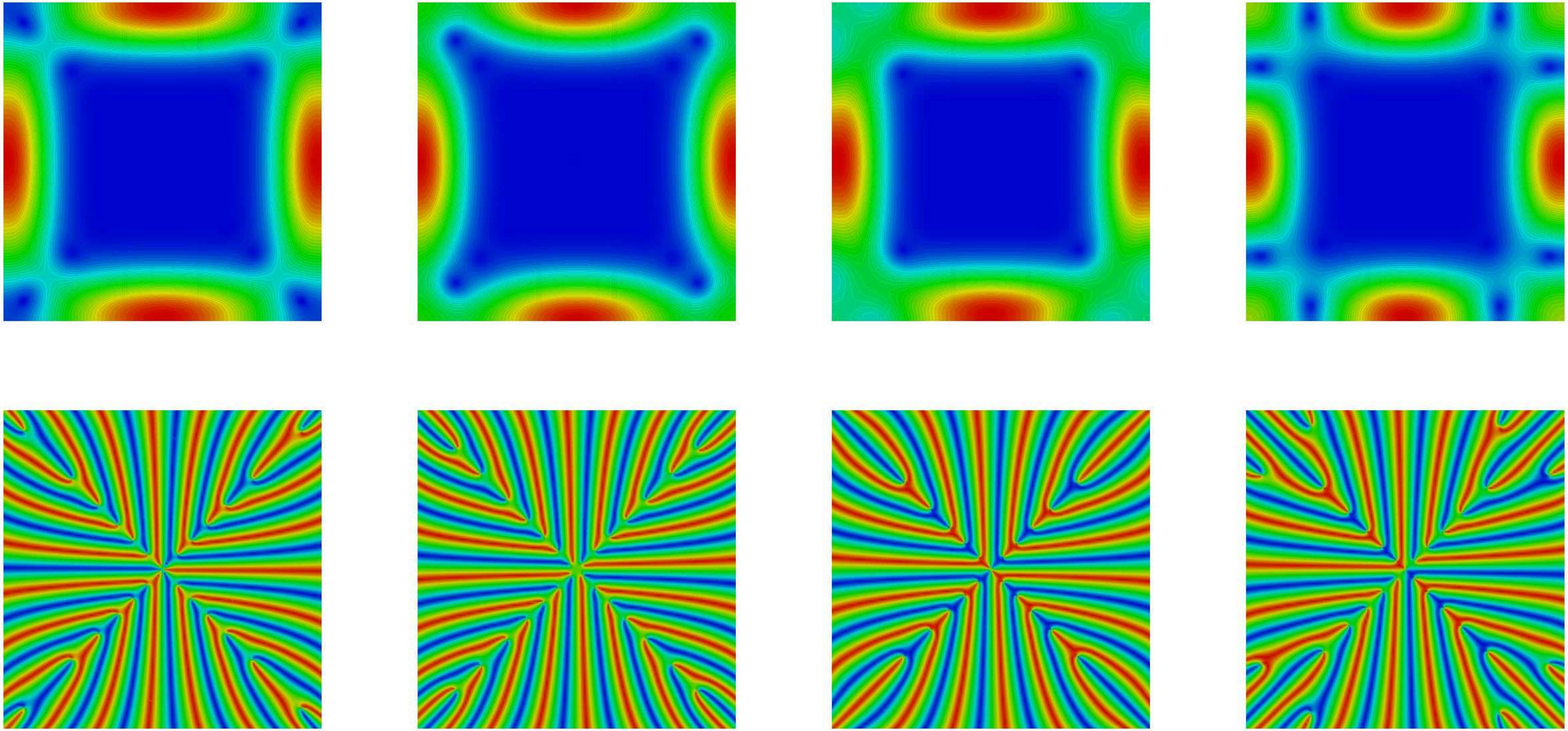
Modules et phases des fonctions propres 5-8, $h = 0.06$



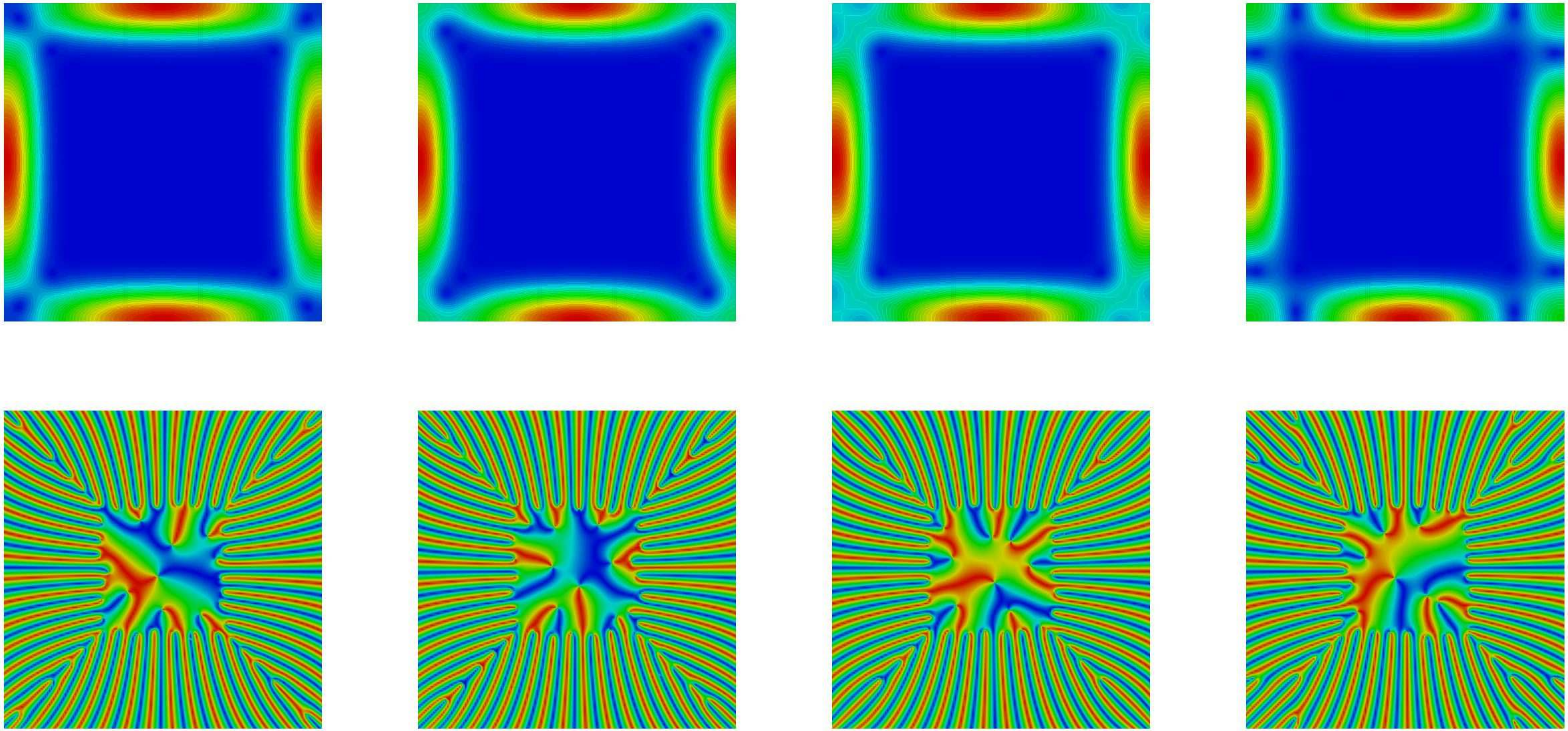
Modules et phases des fonctions propres 5-8, $h = 0.04$



Modules et phases des fonctions propres 5-8, $h = 0.02$

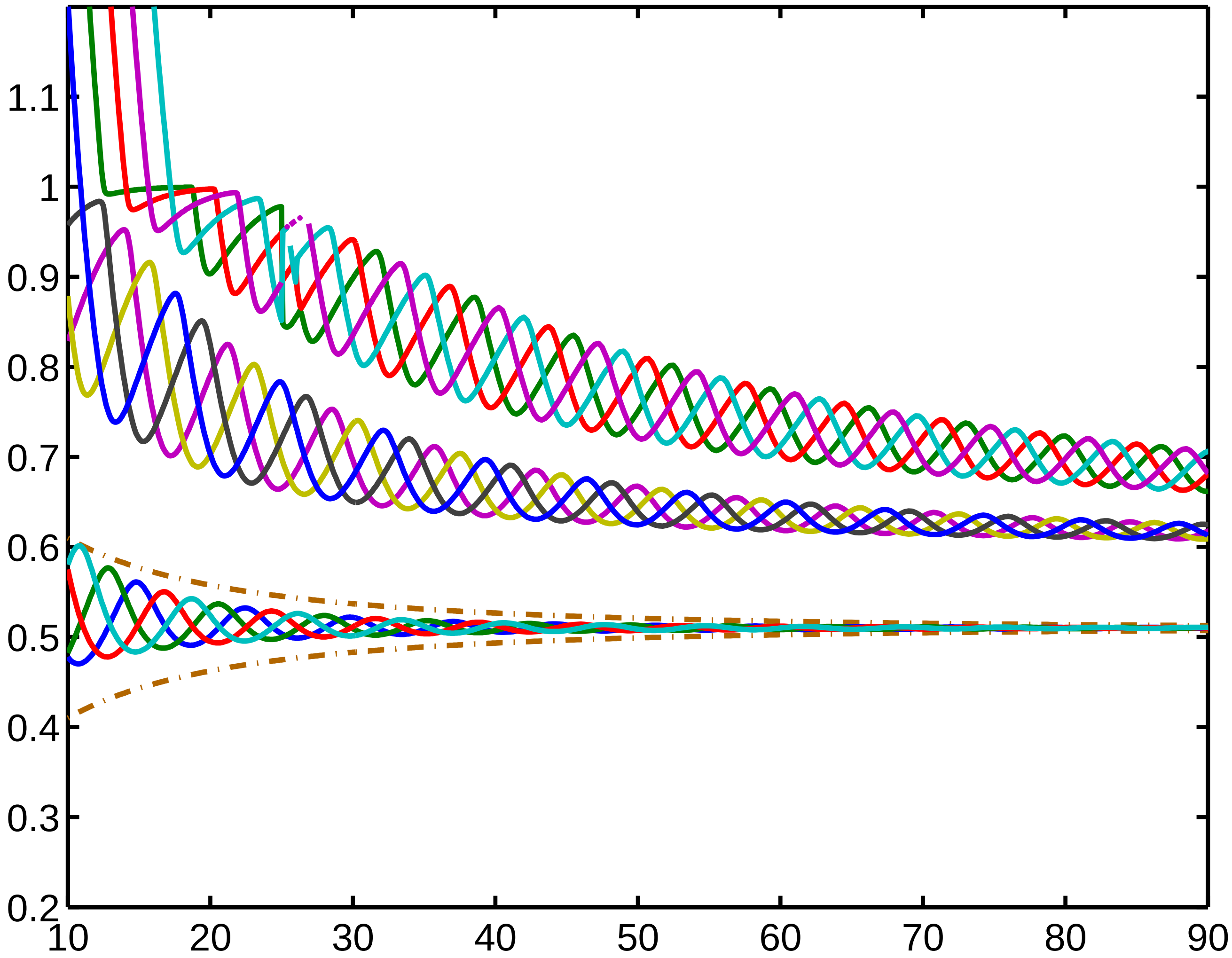


Modules et phases des fonctions propres 5-8, $h = 0.01$



Effet tunnel

Tube exponentiel : $\lambda_1 \pm C\ \exp\left(-2\sqrt{\Theta_0 - \lambda_1}/\sqrt{h}\right)$



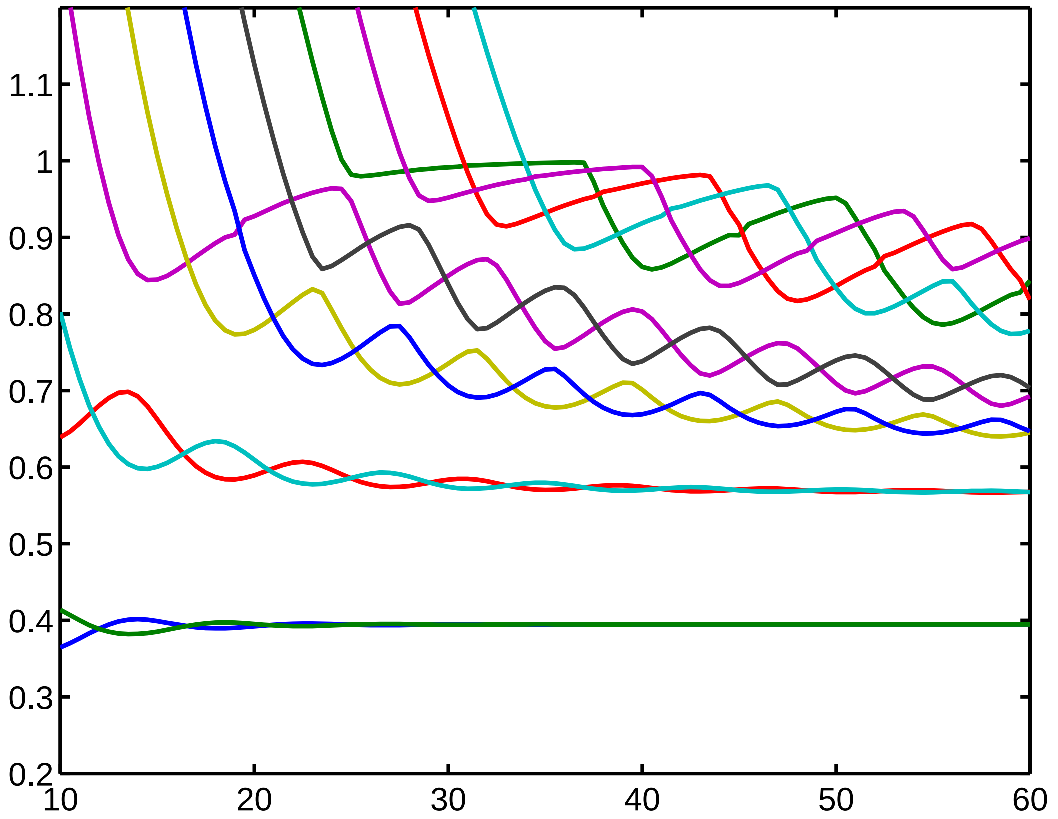
$h^{-1}\mu_{h,n}$ *versus* h^{-1}

Modes propres sur un polygone

Losange

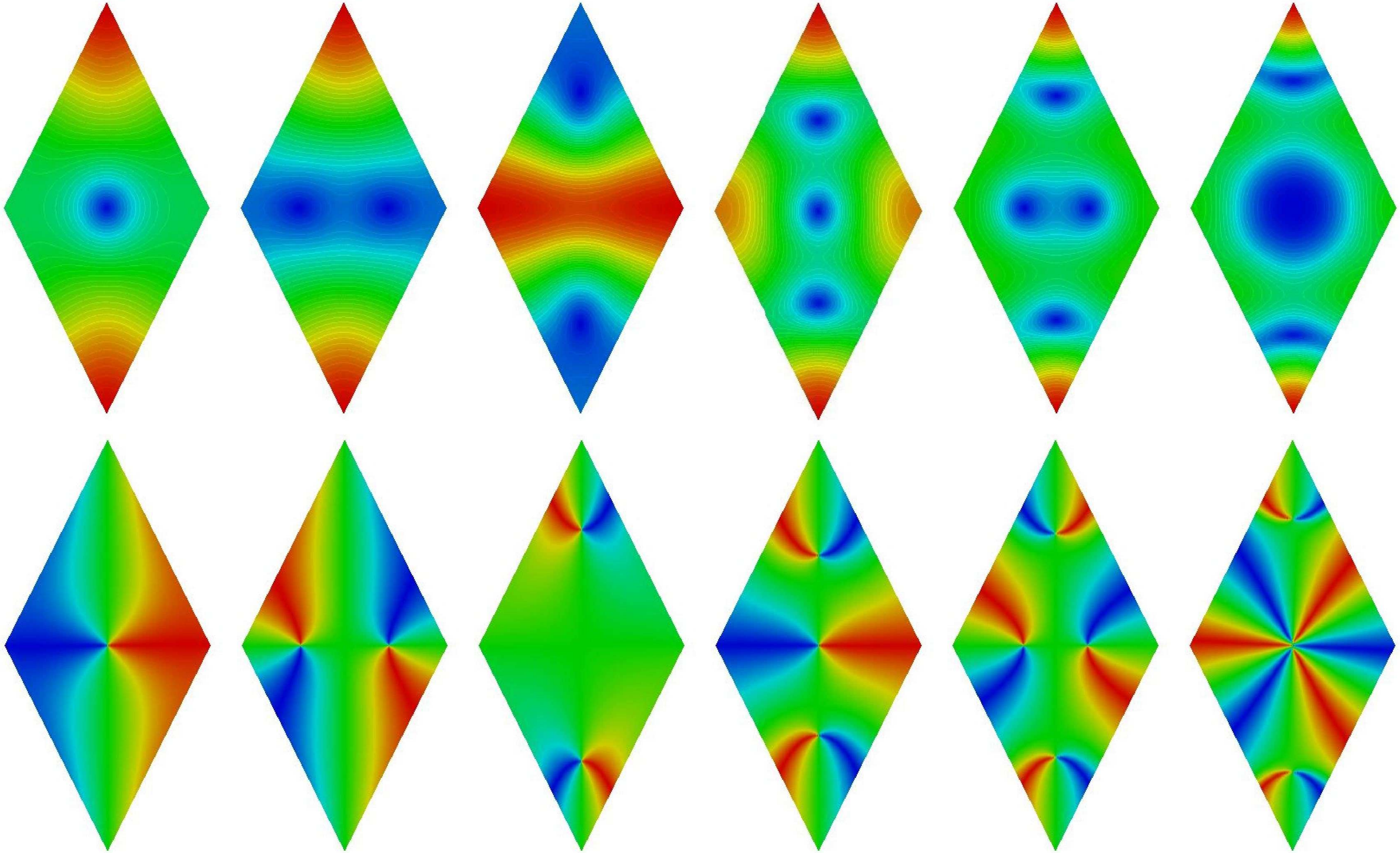
$\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4 < \Theta_0$

$\mu_2(\alpha) = \Theta_0$

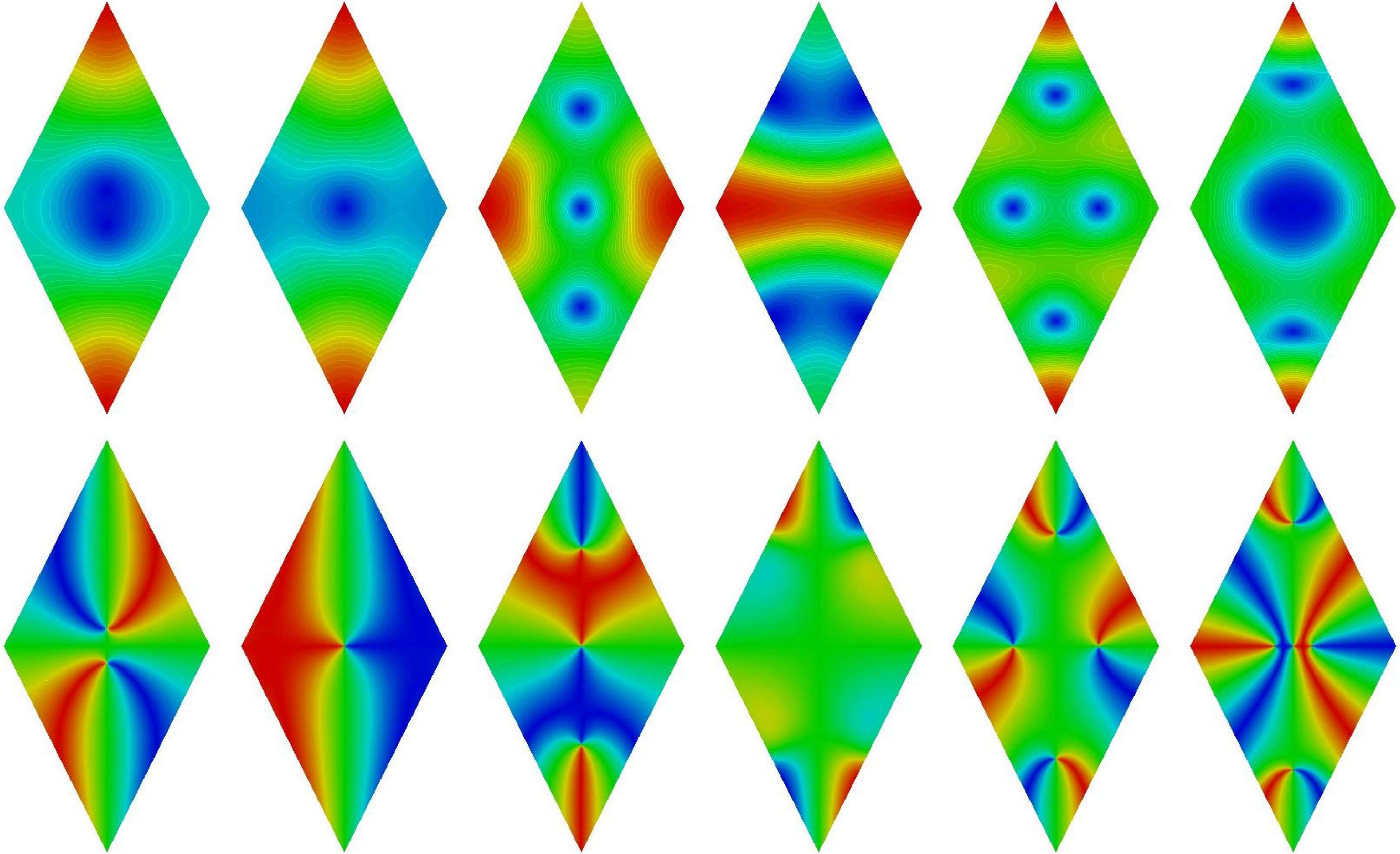


Losange

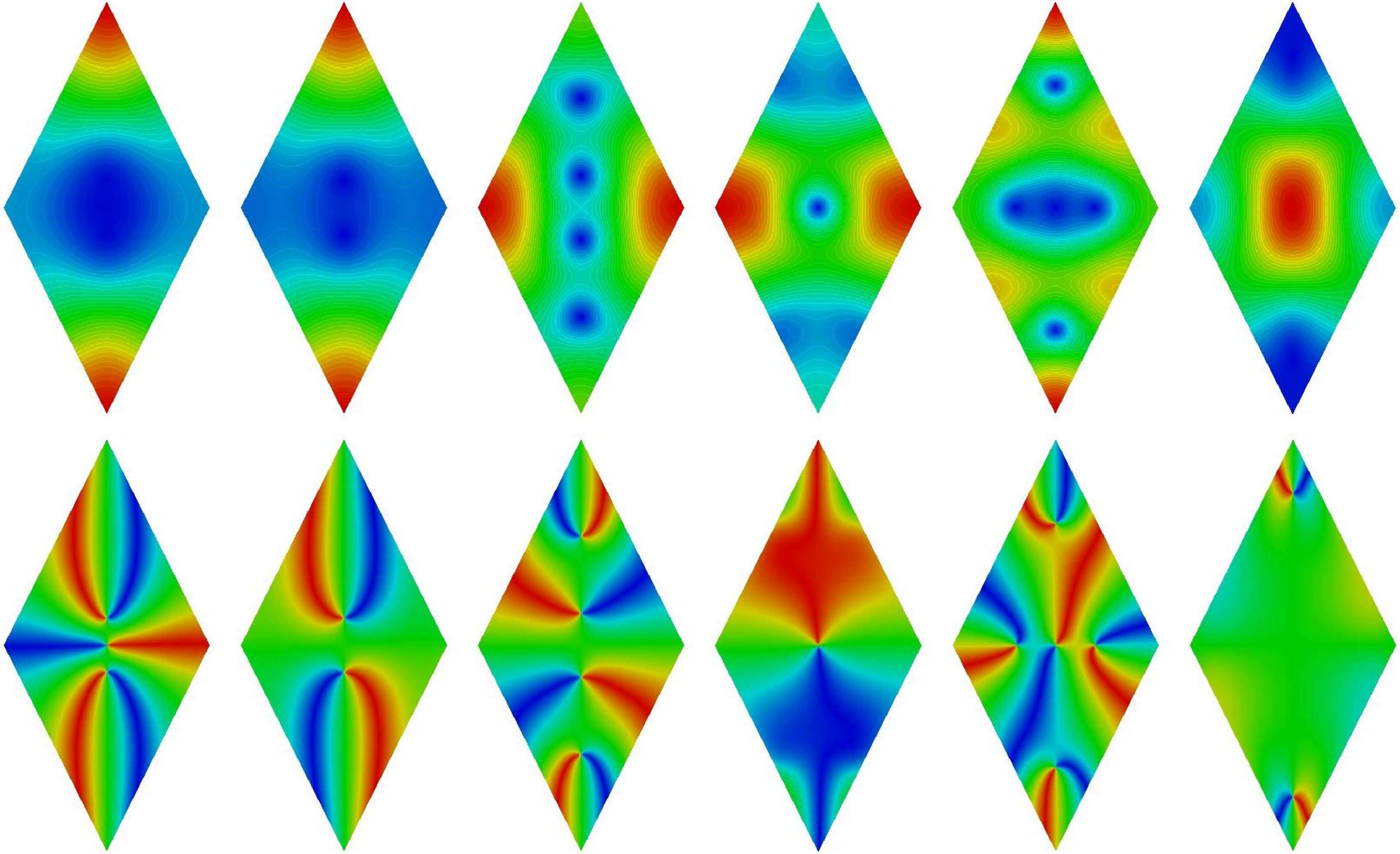
Modules et phases des fonctions propres 1-6, $h = 0.1$



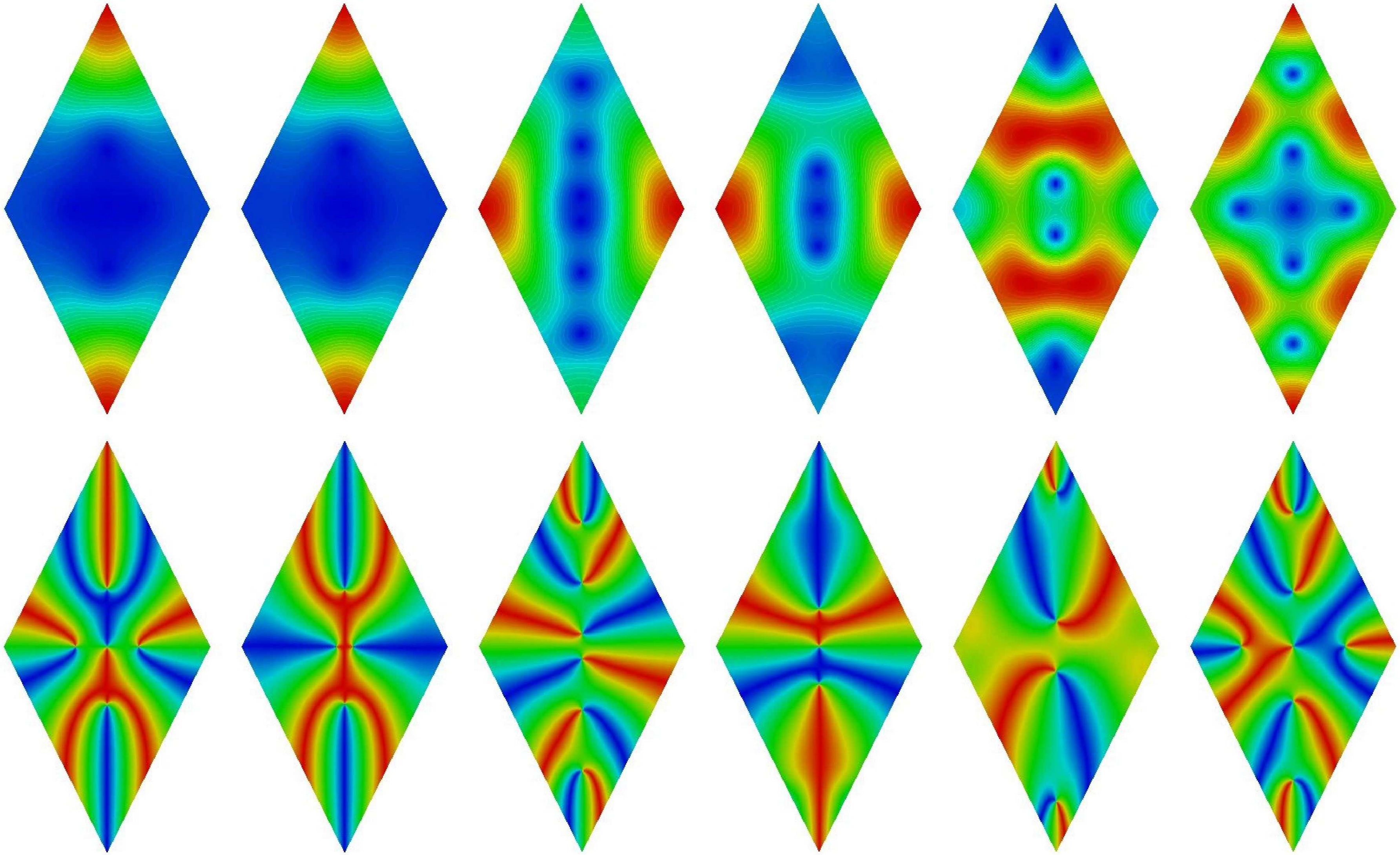
Modules et phases des fonctions propres 1-6, $h = 0.08$



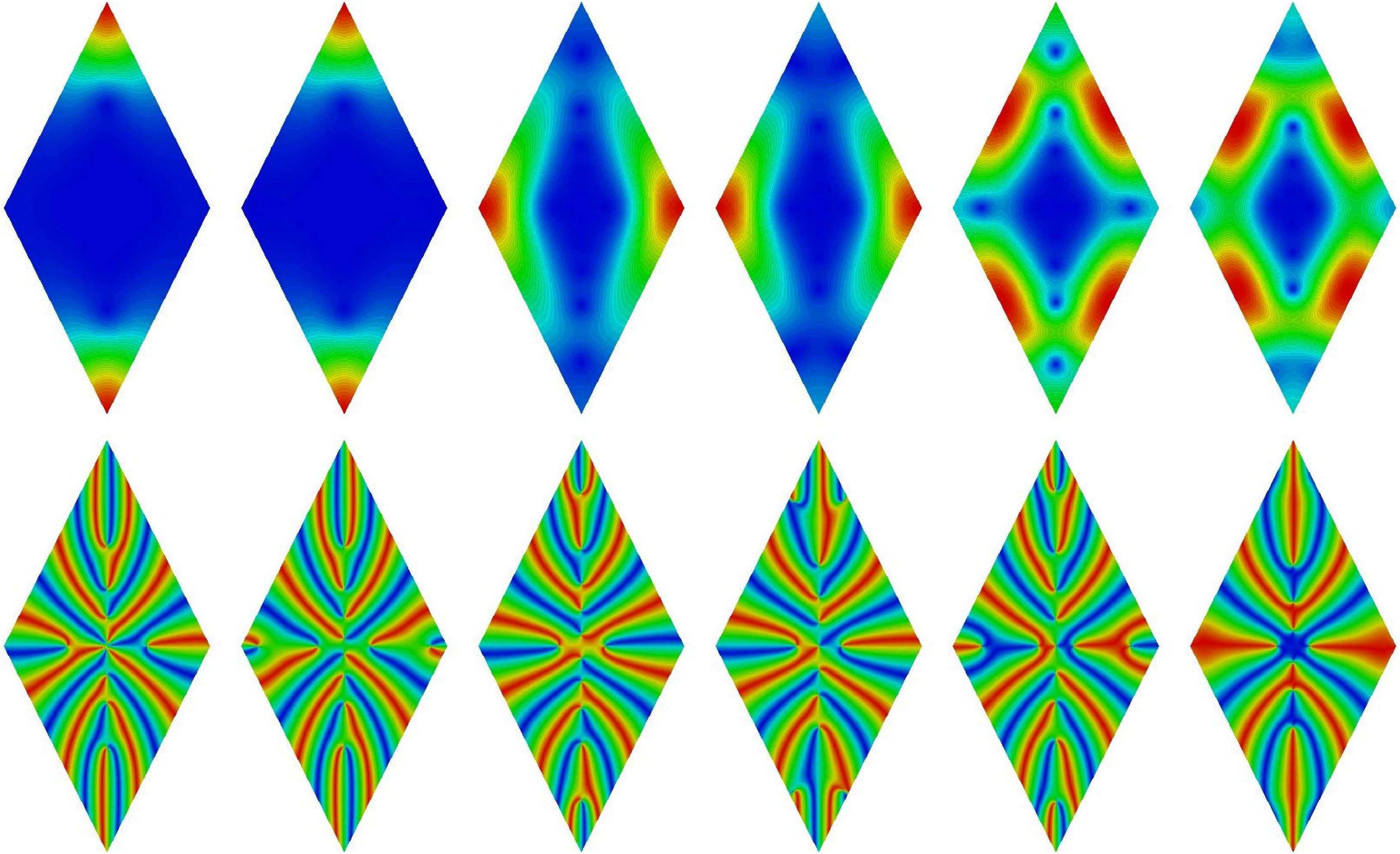
Modules et phases des fonctions propres 1-6, $h = 0.06$



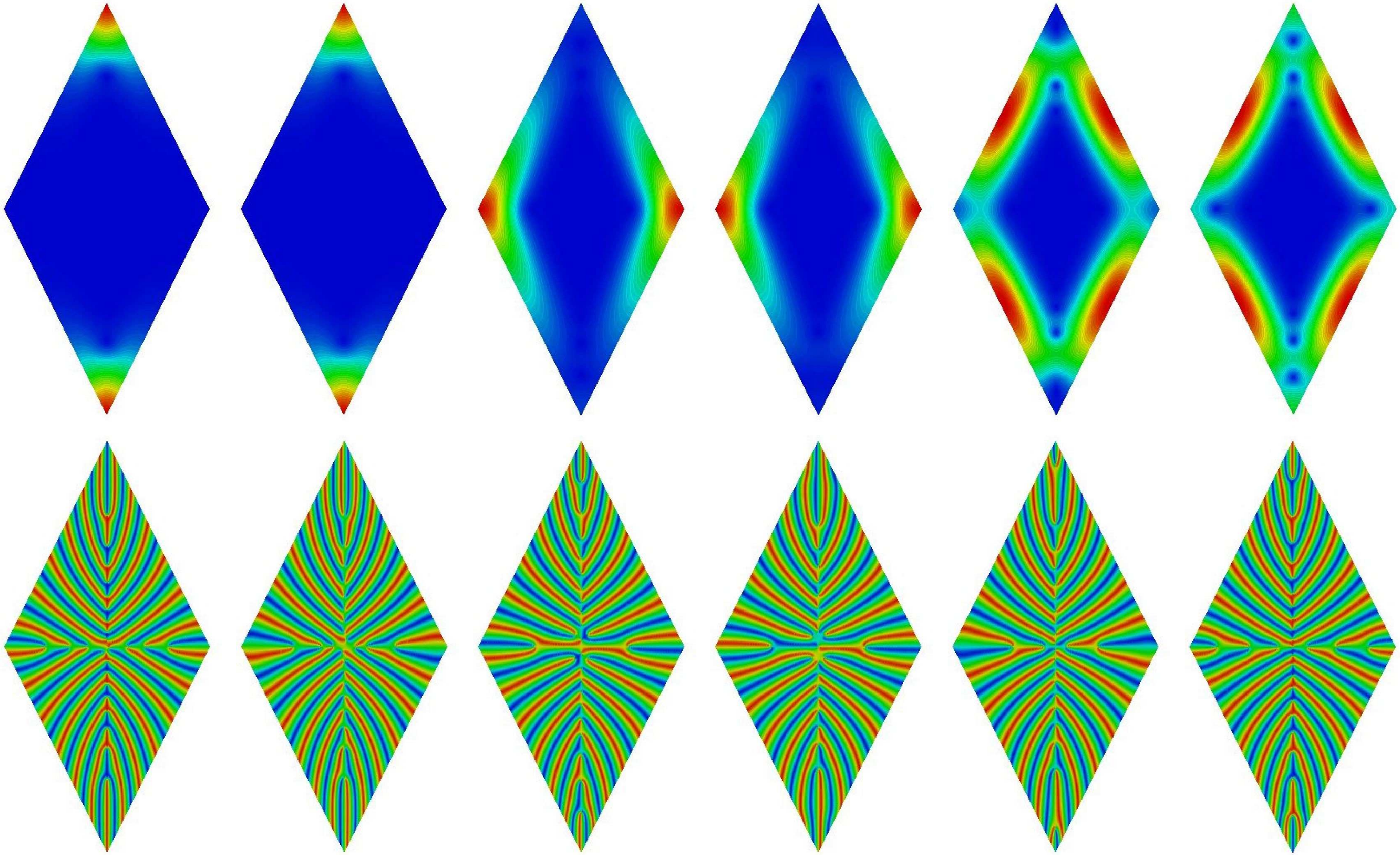
Modules et phases des fonctions propres 1-6, $h = 0.04$



Modules et phases des fonctions propres 1-6, $h = 0.02$



Modules et phases des fonctions propres 1-6, $h = 0.01$

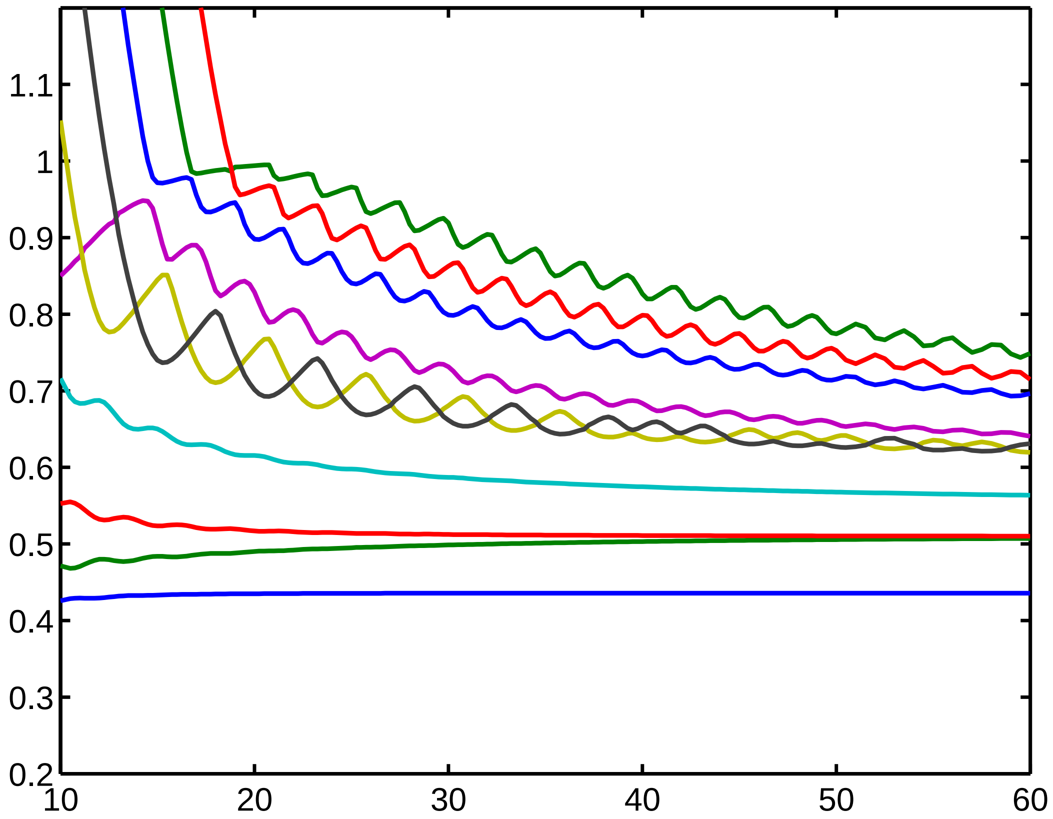


Modes propres sur un polygone

Trapèze

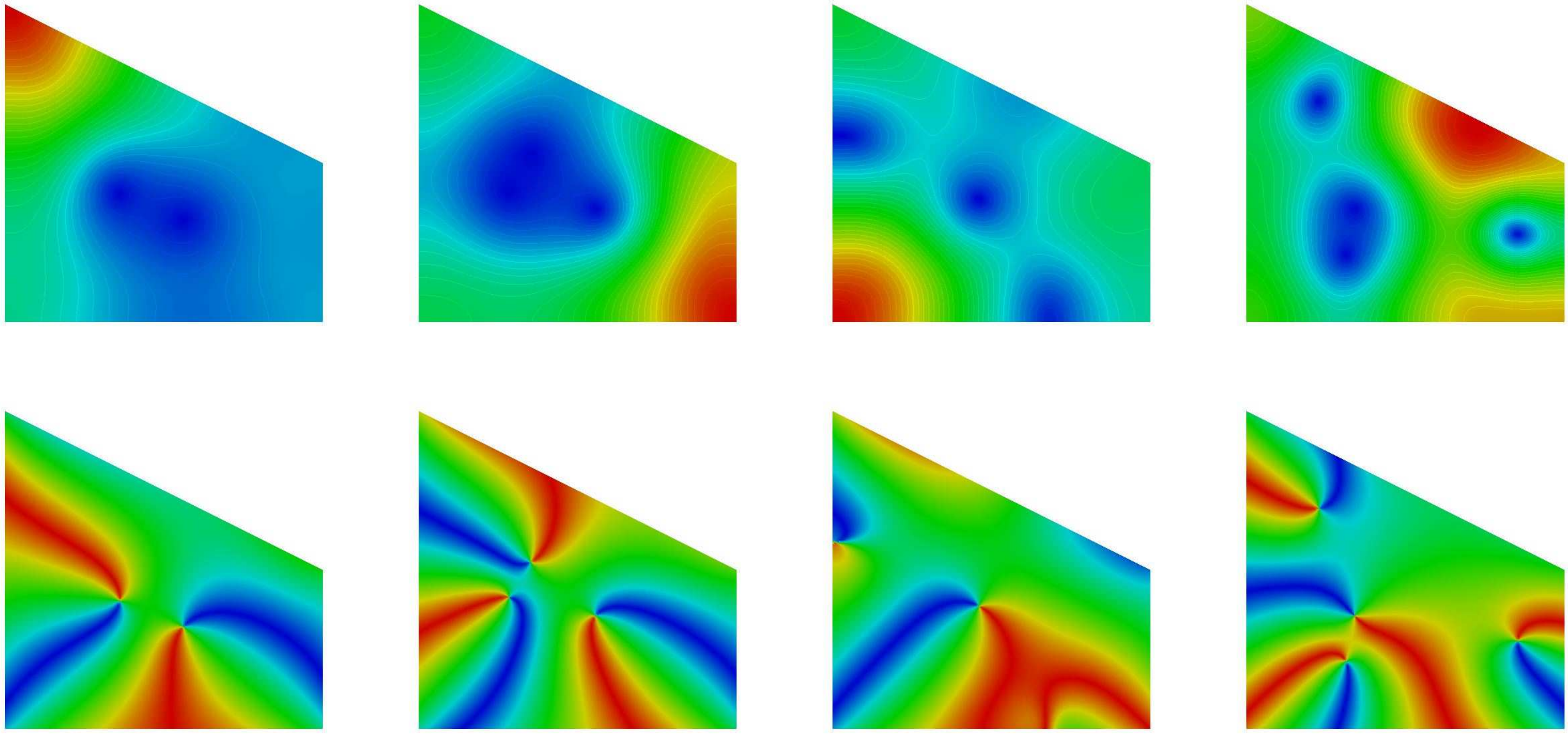
$\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 < \Theta_0$

$\mu_2(\alpha) = \Theta_0$

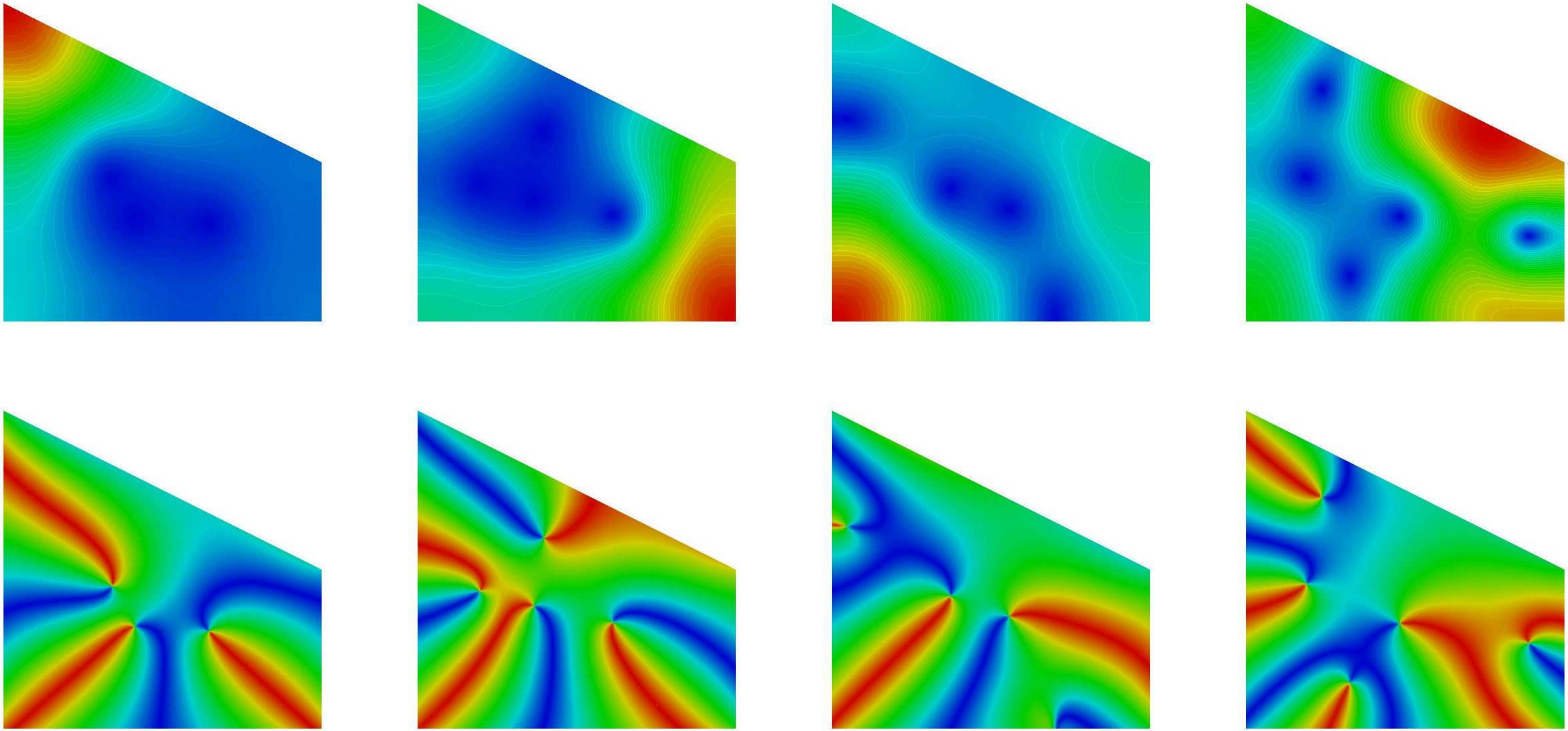


Trapèze

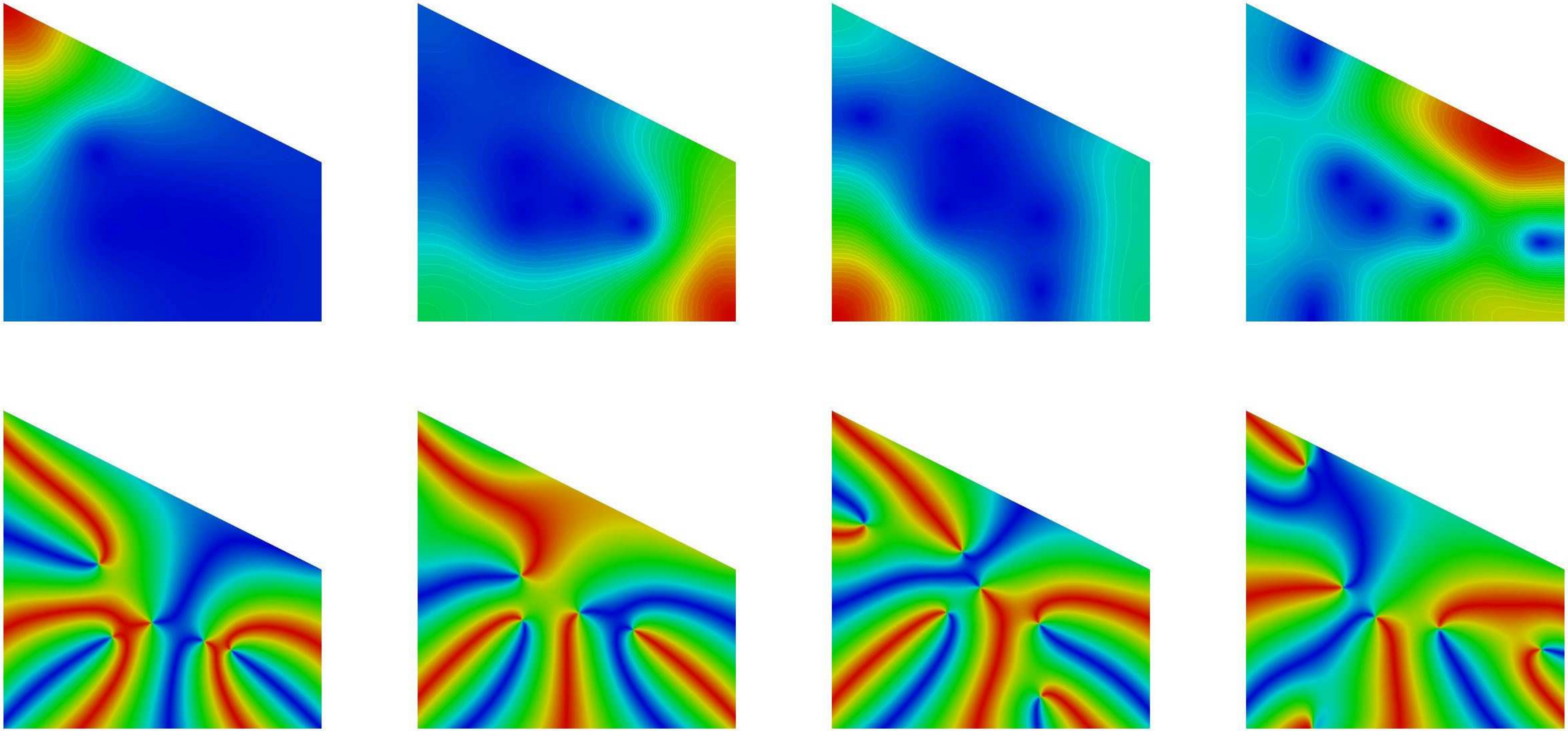
Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.1$



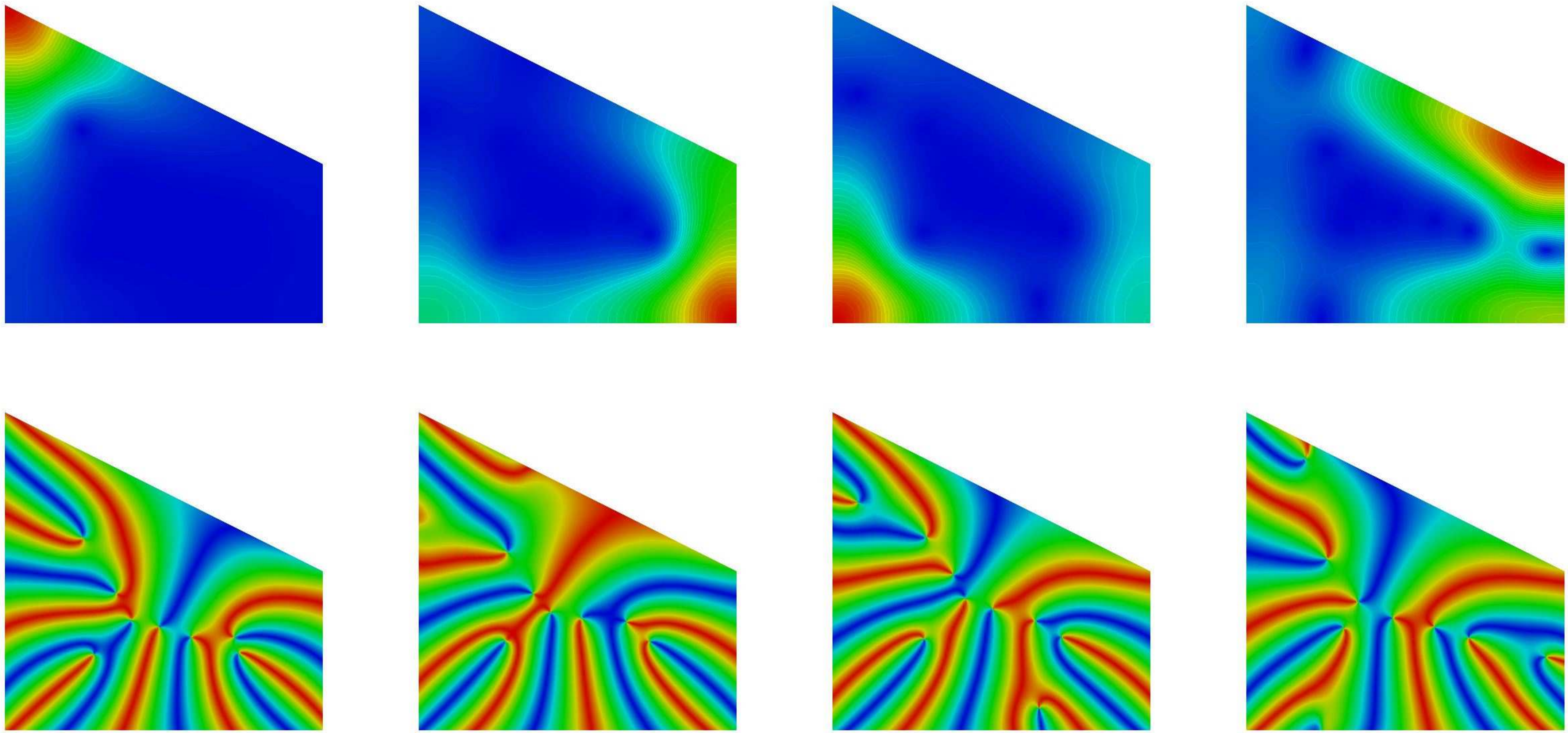
Modules et phases des fonctions propres 1-4, $\quad h = 0.08$



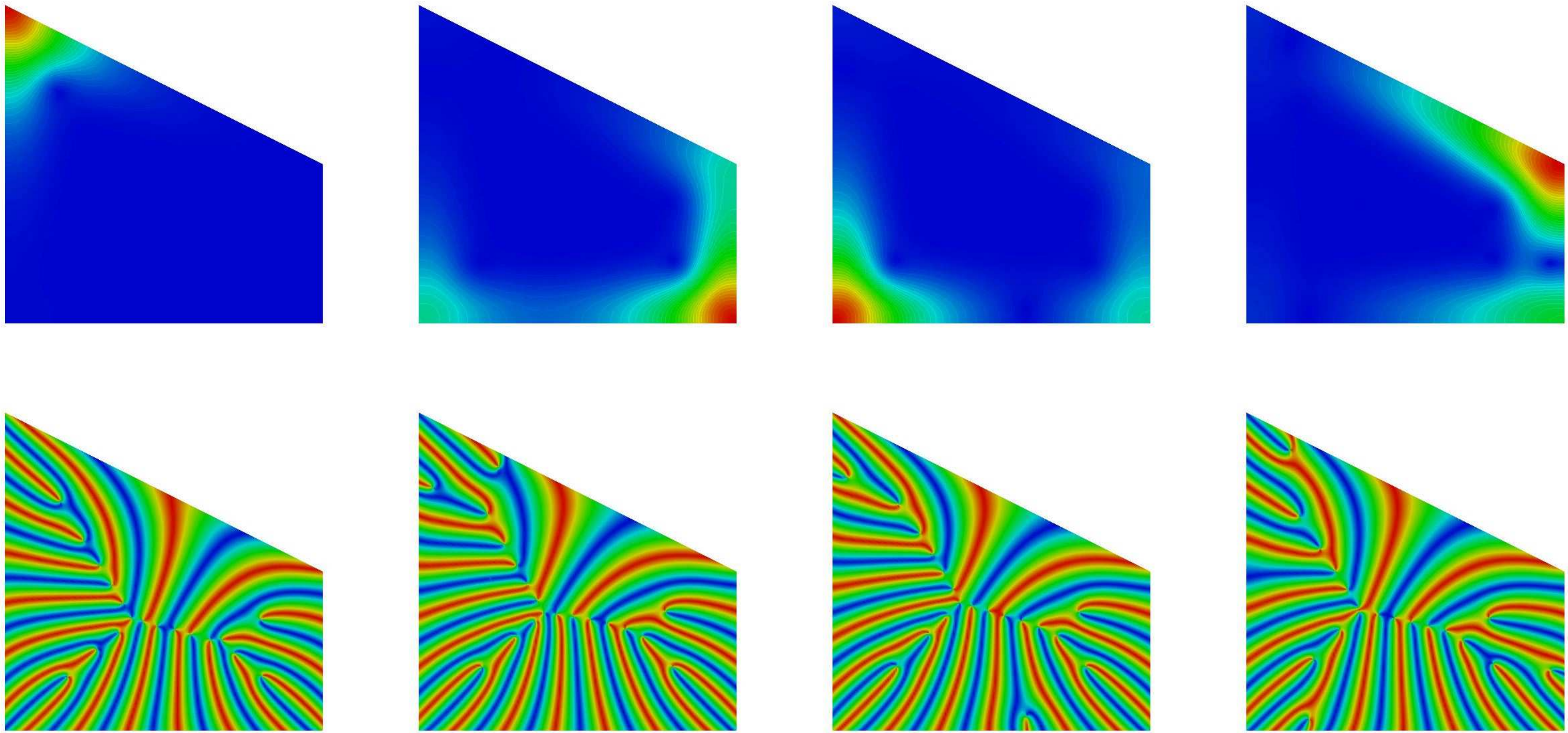
Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.06$



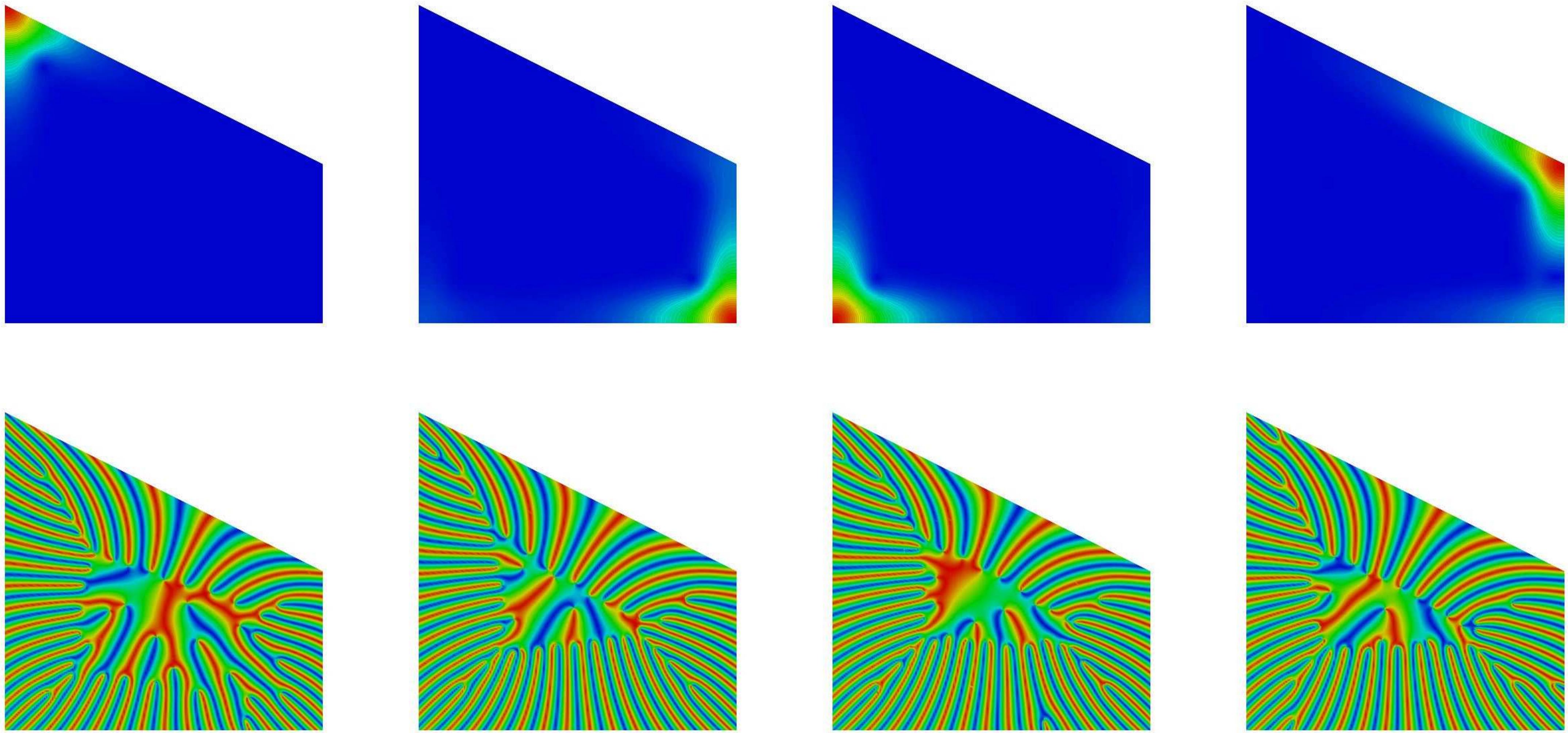
Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.04$



Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.02$



Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.01$

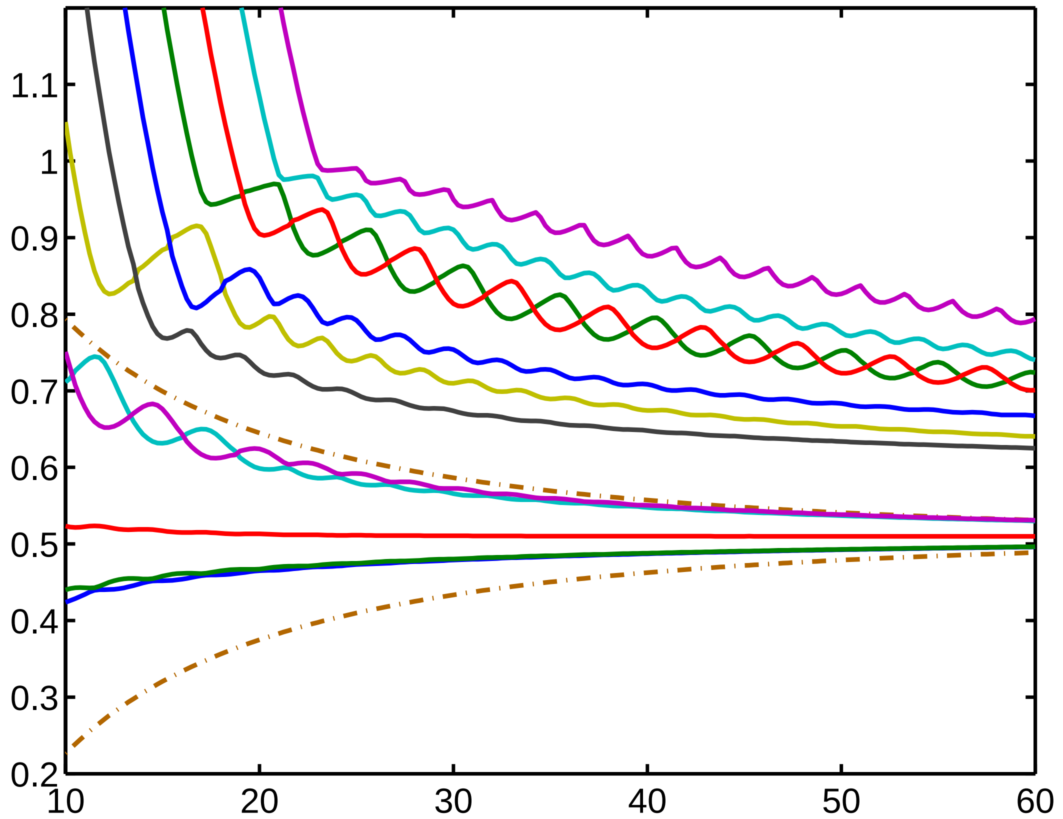


Modes propres sur un domaine polygonal non convexe

L-shape

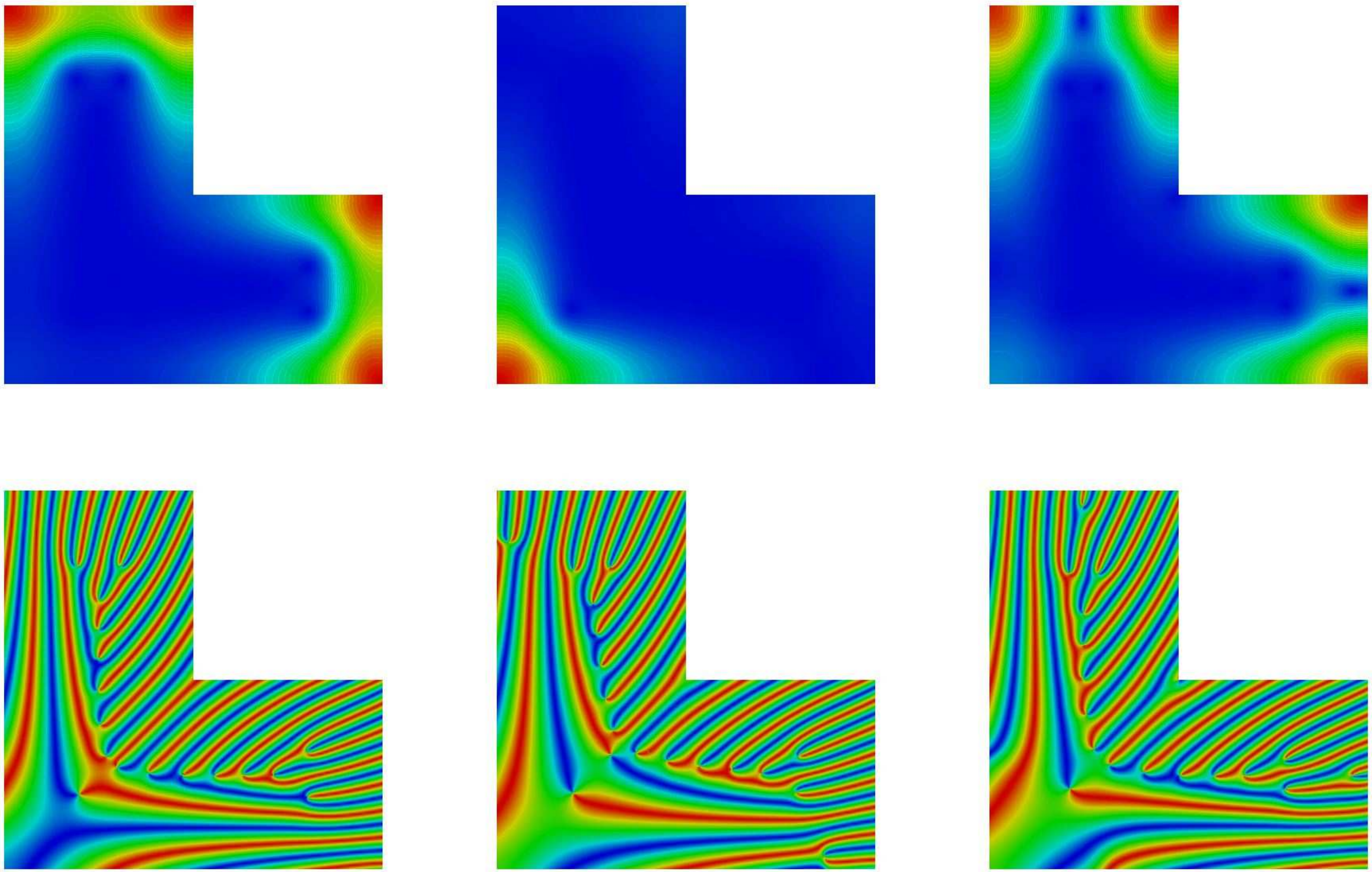
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 < \Theta_0$$

$$\mu_1(3\pi/2) = \Theta_0, \quad \mu_2(\pi/2) = \Theta_0$$



L-shape

Modules et phases des vecteurs propres $1,\ 3,\ 5,\quad h = 0.02$



Opérateur de Schrödinger sur un polygone curviligne

Ω polygone curviligne borné avec bord régulier par morceaux

$$p_h(u,v) = \int_\Omega (h\nabla - i\mathcal{A})u \cdot \overline{(h\nabla - i\mathcal{A})v}\, dx, \;\; u,v \in H^1(\Omega)$$

$$P_h = -(h\nabla - i\mathcal{A})^2 \text{ on } \mathcal{D}(P_h) = \{u \in H^2(\Omega), \nu \cdot (h\nabla - i\mathcal{A})u_{|\partial\Omega} = 0\}$$

- $b = \inf_{x \in \overline{\Omega}} \mathcal{B}(x)$ et $b' = \inf_{x \in \partial\Omega} \mathcal{B}(x)$
- $\mu_{h,n}$ la n-ème valeur propre de P_h comptée avec multiplicité
- λ_n la n-ème valeur propre de $\oplus_{\mathsf{s}\in\Sigma}\mathcal{B}(\mathsf{s})Q^{\alpha_{\mathsf{s}}}$ comptée avec multiplicité

Hypothèses

1. $0 < \alpha_{\mathsf{s}} < \pi$ pour tout $\mathsf{s} \in \Sigma$

   $K_{\Omega,\mathcal{B}}$ le plus grand entier tel que

$$\lambda_{K_{\Omega,\mathcal{B}}} < \min(\Theta_0 b', b)$$

2. Pour $n \leq K_{\Omega,\mathcal{B}}$ et $\mathsf{s} \in \Sigma$, $k \leq K_{\alpha_{\mathsf{s}}}$ t. q. $\mathcal{B}(\mathsf{s})\mu_k(\alpha_{\mathsf{s}}) = \lambda_n$, $\mu_k(\alpha_{\mathsf{s}})$ est une valeur propre simple de $Q^{\alpha_{\mathsf{s}}}$

Construction des quasi-modes

1. Changement de variables autour d'un sommet pour se ramener à un secteur
2. Changement de jauge : pour avoir un champ magnétique proche de 1
3. Scaling et développement de Taylor : pour travailler avec un développement en séries formelles

Asymptotique des valeurs propres

Théorème 4. *Soit* $L \geq 2$, $\mathcal{E}^L(h)$ *l'ensemble des* $K_{\Omega,\mathcal{B}}$ *plus petites asymptotiques à l'ordre L obtenues par les séries formelles et rangées en ordre croissant :*

$$\mathcal{E}^L(h) = \{\mu_{h,\mathsf{s},k}^{[L]},\ \mathsf{s} \in \Sigma, k \leq K_{\alpha_\mathsf{s}} \text{ tel que } \mathcal{B}(\mathsf{s})\mu_k(\alpha_\mathsf{s}) < \min(b'\Theta_0, b)\}.$$

Soit $n \leq K_{\Omega,\mathcal{B}}$. *Il existe* h_0, $\mathsf{s} \in \Sigma$ *et* $k \leq K_{\alpha_\mathsf{s}}$ *tels que* $\mu_{h,\mathsf{s},k}^{[L]}$ *est le n-ème élément de* $\mathcal{E}^L(h)$ *pour tout* $h \in (0, h_0)$. *Nous avons*

$$\mu_{h,\mathsf{s},k}^{[L]} = h\mathcal{B}(\mathsf{s}) \sum_{\ell=0}^{L} h^{\ell/2} \mu_{\mathsf{s},k}^{\ell} \quad \text{avec} \quad \mu_{\mathsf{s},k}^{0} = \mu_k(\alpha_\mathsf{s}).$$

Alors

$$|\mu_{h,n} - \mu_{h,\mathsf{s},k}^{[L]}| \leq Ch^{\frac{L+1}{2}},\ \forall h \in (0, h_0).$$

Espaces propres

- $\{\Lambda_1 < \ldots < \Lambda_M\}$ ensemble des valeurs distinctes de $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$

- Pour tout $n \leq N$, $(\mu_{h,n}, u_{h,n})$ le n-ème mode propre de P_h

- Pour tout $m \leq M$, m-ème cluster d'espaces propres de P_h

$$F_{h,m} = \text{span}\{u_{h,n} \text{ pour tout } n \text{ tel que } \lambda_n = \Lambda_m\}$$

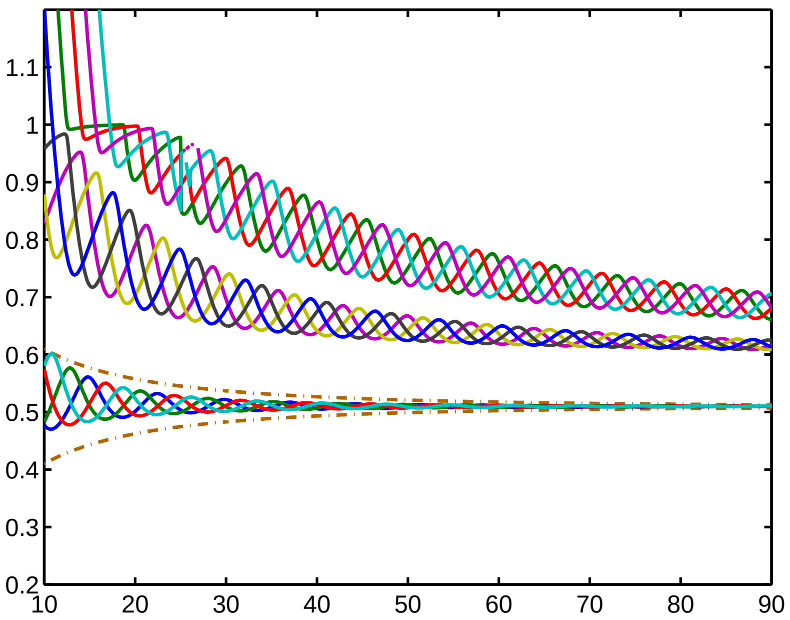
et le cluster de quasi-modes correspndant pour tout $L \in \mathbb{N}$

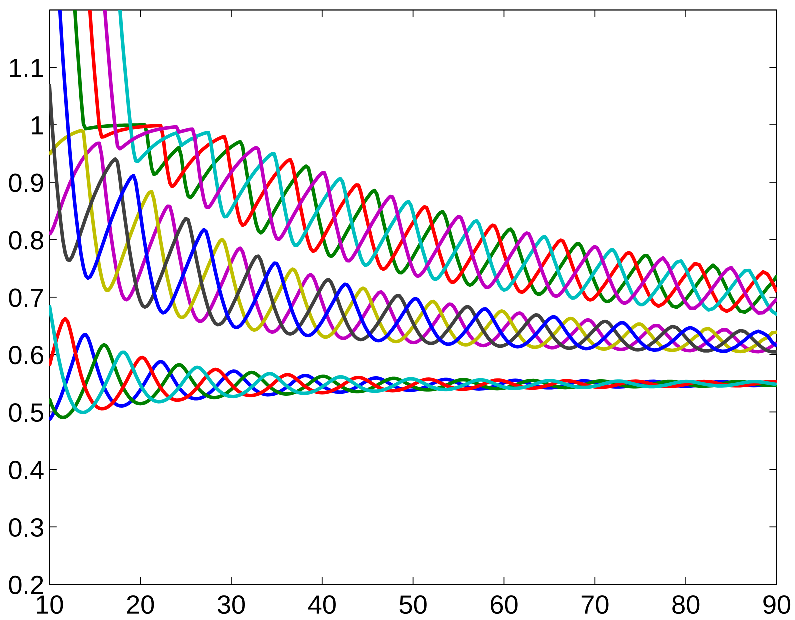
$$E^{[L]}_{h,m} = \text{span}\{\phi^{[L]}_{h,\mathsf{s},k} \text{ pour tout } \mathsf{s} \in \Sigma, k \geq 1 \text{ tel que } \mathcal{B}(\mathsf{s})\mu_k(\alpha_\mathsf{s}) = \Lambda_m\}$$

Théorème 5. *Pour tout $m \leq M$ et $L \geq 2$, il existe $C > 0$ tel que*

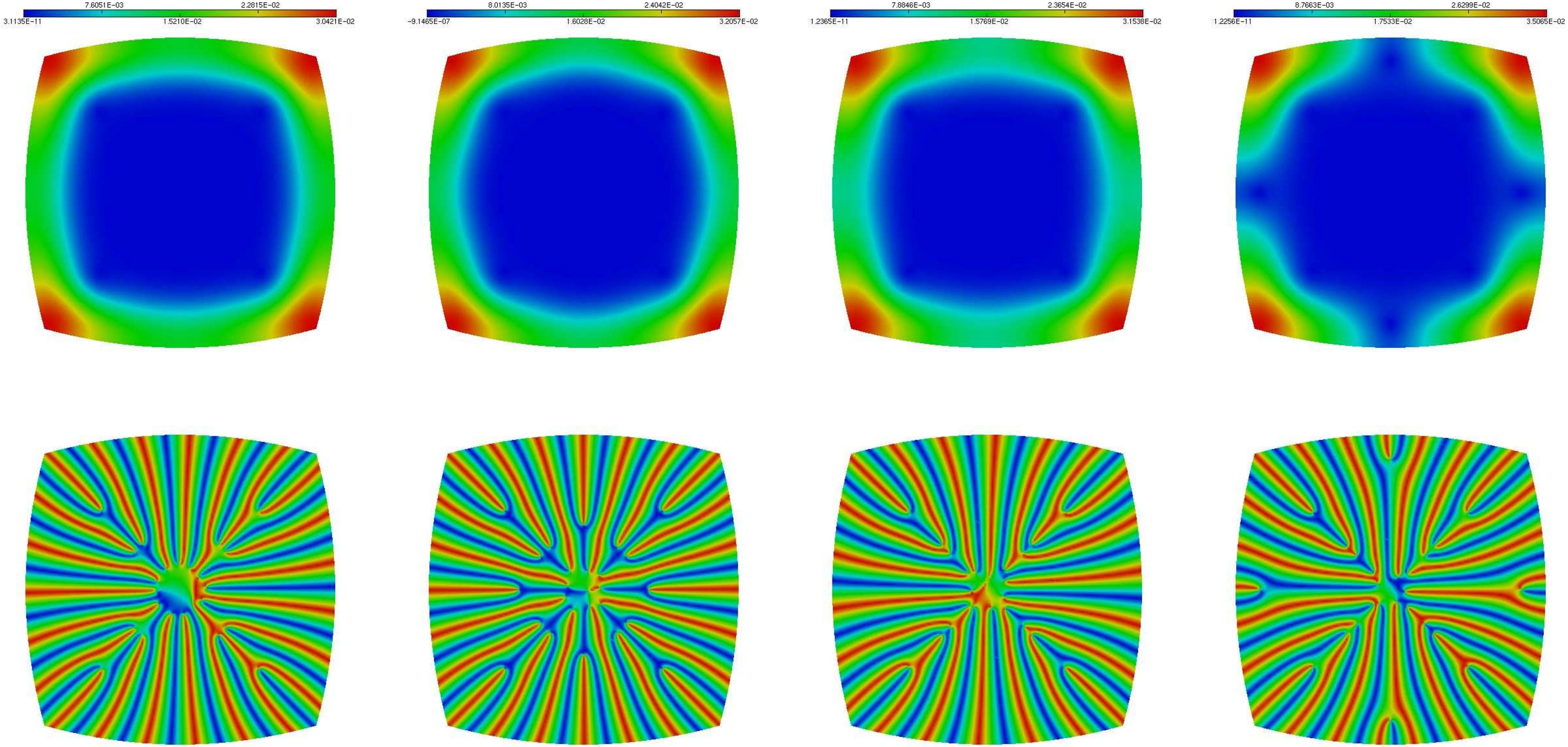
$$d(F_{h,m}, E^{[L]}_{h,m}) \leq Ch^{\frac{L-1}{2}}$$

Effet tunnel sur le carré et le carré courbe





Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.02$



Applications à l'apparition de la supraconductivité

(avec S. Fournais, Univ. Aarhus, Denmark)

Notations

Ω	polygone curviligne borné, simplement connexe
Σ	ensemble des sommets, $N = \lvert\Sigma\rvert > 0$
α_{s}	angle au sommet s
$\mathcal{H}_\Omega(B)$	réalisation de Neumann associée à $\int_\Omega \lvert(-i\nabla - B\mathbf{F})u\rvert^2\,dx$,
$\lambda_{n,\Omega}(B)$	n-ème valeur propre de $\mathcal{H}_\Omega(B)$ comptée avec multiplicité

Hypothèses : pour tout $\mathsf{s} \in \Sigma$

1. $\mu_1(\alpha_{\mathsf{s}}) < \Theta_0$
2. $\alpha_{\mathsf{s}} \in (0, \pi)$

$$\Lambda_1 := \min_{\mathsf{s}\in\Sigma} \mu_1(\alpha_{\mathsf{s}})$$

Asymptotique de $H_{C_3}(\kappa)$

Théorème 6. *Il existe $\kappa_0 > 0$ tel que si $\kappa \geq \kappa_0$ alors l'équation*

$$\lambda_{1,\Omega}(\kappa H) = \kappa^2,$$

a une unique solution $H = H_{C_3}^{\rm lin}(\kappa)$.

De plus, il existe une suite de réels $(\eta_j)_{j\geq 1}$ telle que

$$H_{C_3}^{\rm lin}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Lambda_1}\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \kappa^{-j}\Big).$$

Si κ_0 est choisi assez grand, alors pour $\kappa \geq \kappa_0$, les champs critiques coïncident et satisfont

$$\underline{H}_{C_3}(\kappa) = \overline{H}_{C_3}(\kappa) = H_{C_3}^{\rm lin}(\kappa).$$

Remarques

Si $\Sigma = \emptyset$, asymptotique obtenue par Fournais-Helffer

$$H_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Theta_0}\left(1 + \frac{C_1 k_{max}}{\sqrt{\Theta_0 \kappa}} - C_1\sqrt{\frac{3k_2}{2}}\kappa^{-\frac{3}{2}} + \kappa^{-\frac{7}{4}}\sum_{j=0}^{\infty}\eta_j \kappa^{-\frac{j}{4}}\right).$$

Pour un rectangle, terme principal donné par Pan

$$H_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\mu_1(\frac{\pi}{2})} + \mathcal{O}(1).$$

Localisation de l'apparition de la supraconductivité

Pour les domaines réguliers :

$$H_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Theta_0} + \mathcal{O}(1)$$

+ localisation des minimiseurs autour des points de courbure maximale

Pour les domaines à coins :

$$H_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Lambda_1} + \mathcal{O}(1)$$

avec $\Lambda_1 < \Theta_0$

$\Rightarrow$ la présence de coins change l'ordre du terme principal de $H_{C_3}(\kappa)$.

$\Rightarrow$ la supraconductivité est dominée par les coins dans le régime

$$\frac{\kappa}{\Theta_0} \ll H \leq H_{C_3}(\kappa)$$

Théorème 7. *Soit* $\mu > 0$ *tel que* $\min_{\mathsf{s}\in\Sigma} \mu_1(\alpha_{\mathsf{s}}) < \mu < \Theta_0$.

$$\Sigma' := \{\mathsf{s} \in \Sigma \,\big|\, \mu_1(\alpha_{\mathsf{s}}) \leq \mu\}.$$

Il existe $\kappa_0, M, C, \epsilon > 0$ *tels que si*

$$\kappa \geq \kappa_0, \qquad \frac{H}{\kappa} \geq \mu^{-1},$$

et $(\psi, \mathbf{A})$ *est un minimiseur de* $\mathcal{E}_{\kappa,H}$, *alors*

$$\int_\Omega e^{\epsilon\sqrt{\kappa H}\operatorname{dist}(x,\Sigma')}\left(|\psi(x)|^2 + \frac{1}{\kappa H}|p_{\kappa H\mathbf{A}}\psi(x)|^2\right) dx \leq C \int_{\{x:\sqrt{\kappa H}\operatorname{dist}(x,\Sigma')\leq M\}} |\psi(x)|^2\, dx.$$

Contribution des sommets

Soit $\alpha \in (0, \pi)$ tel que $\mu_1(\alpha) < \Theta_0$.

Définissons, pour $\mu_1, \mu_2 > 0$,

$$J^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}[\psi] = \int_{\Gamma_\alpha} \left\{ |(-i\nabla - \mathbf{F})\psi|^2 - \mu_1|\psi|^2 + \frac{\mu_2}{2}|\psi|^4 \right\} dx,$$

sur $\{\psi \in L^2(\Gamma_\alpha) \,|\, (-i\nabla - \mathbf{F})\psi \in L^2(\Gamma_\alpha)\}$.

Définissons l'énergie fondamentale correspondante

$$E^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2} := \inf J^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}[\psi].$$

Théorème 8.

Supposons

$$\frac{\kappa}{H(\kappa)} \to \mu \in (0, \Theta_0) \qquad as\ \kappa \to \infty.$$

Soit $(\psi, \mathbf{A}) = (\psi, \mathbf{A})_{\kappa,H(\kappa)}$ *un minimiseur de* $\mathcal{E}_{\kappa,H(\kappa)}$.

Alors

$$\mathcal{E}_{\kappa,H(\kappa)}[\psi, \mathbf{A}] \to \sum_{\mathsf{s}\in\Sigma} E^{\alpha_{\mathsf{s}}}_{\mu,\mu} \qquad quand\ \kappa \to \infty$$