

PHYSIQUE DES SOLITONS

(Extrait)



Michel PEYRARD et Thierry DAUXOIS

École Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cédex 07

17 juillet 2007

Chapitre 1

Introduction

Le 19^e siècle et la première moitié du 20^e siècle ont marqué le triomphe de la *physique linéaire*, d’abord à travers les équations de Maxwell, puis avec la mécanique quantique dont tout le formalisme repose sur la linéarité associée au principe de superposition. Les outils mathématiques de la physique étaient eux-mêmes fondamentalement des outils linéaires comme la transformée de Fourier, la théorie de la réponse linéaire, les approches perturbatives...

Bien entendu les physiciens avaient identifié l’importance des phénomènes non linéaires qui apparaissaient dans les équations de Navier-Stokes de l’hydrodynamique, la théorie de la gravitation, les effets collectifs associés aux interactions entre particules en physique des solides, etc. Mais, dans la plupart des cas, on cherchait à éviter les non linéarités ou à les traiter comme des perturbations des théories linéaires.

En revanche, pendant les 40 dernières années, l’importance du *traitement intrinsèque* des non linéarités a été de mieux en mieux perçue et a conduit à deux concepts réellement révolutionnaires par rapport aux idées antérieures, l’attracteur étrange et le soliton.

Ces deux concepts correspondent à deux propriétés étonnantes des systèmes non linéaires, qui semblent contradictoires. L’attracteur étrange est associé à la notion de *chaos* dans un système régi par des équations déterministes. On le rencontre même dans des systèmes à faible nombre de degrés de liberté, que l’on aurait pu croire “simples”. Au contraire le soliton concerne des systèmes à grand nombre de degrés de liberté. *A priori* il semble que l’addition de nouveaux degrés de liberté devrait compliquer le comportement, et pourtant ce n’est pas toujours le cas. Des *structures spatiales cohérentes* peuvent apparaître grâce à des effets collectifs et conduire au contraire à une *auto organisation*. La compréhension de la coexistence entre structures cohérentes et chaos dans les systèmes non linéaires est encore une question ouverte.

Le soliton est une *onde solitaire* c’est-à-dire localisée spatialement, dont les propriétés de stabilité sont spectaculaires. Dès sa première observation [135] en 1834 par un ingénieur hydrodynamicien, John Scott Russell, il a suscité pas-

sion et débats. John Scott Russell a été tellement fasciné par cette observation inattendue qu'il a consacré dix années de sa vie à étudier le phénomène, tandis que les théories, fondées sur des approches linéarisées, montraient... que le soliton ne pouvait pas exister. Le soliton a une histoire à éclipses puisqu'après l'observation de 1834, il a fallu attendre 1895 pour qu'une théorie [85] puisse en rendre compte grâce à l'équation obtenue par Korteweg et de Vries. Puis le phénomène a été oublié jusqu'à ce qu'une expérience numérique [55], faite par Fermi, Pasta et Ulam en 1953 sur un des premiers ordinateurs à Los Alamos, révèle un phénomène étonnant. Un réseau unidimensionnel de particules couplées par un potentiel non linéaire n'atteignait pas toujours l'équilibre thermodynamique comme on le pensait. L'énergie injectée initialement dans un mode commençait, comme prévu, à se distribuer vers les autres modes, mais elle revenait ensuite pratiquement intégralement vers le mode excité initialement. Ce n'est que dix ans plus tard que l'explication a été donnée par Zabusky et Kruskal [159] ; elle fait intervenir les solitons comme nous le verrons dans ce livre. C'est ce travail qui, en 1965, a introduit le terme de *soliton*. Ce n'est pas un hasard si ce nom fait penser à celui d'une particule. Le soliton est une onde, mais il correspond aussi à un maximum localisé dans la densité d'énergie du système, qui se propage en conservant sa forme et sa vitesse, comme le ferait une particule. On dispose ainsi d'une solution d'une équation de champ *classique* qui possède à la fois les propriétés d'une quasi-particule et celles d'une onde. On trouve là des caractéristiques que l'on n'attend que dans les systèmes quantiques. L'analogie peut être poussée plus loin puisqu'on peut même mettre en évidence un effet tunnel pour les solitons [114].

Le travail de Zabusky et Kruskal a constitué un véritable tournant dans l'histoire des solitons qui, à partir de cette date, sont restés sur le devant de la scène et ont donné lieu à d'innombrables travaux, aussi bien sur le plan mathématique que sur le plan physique.

Les équations à solitons, au sens mathématique du terme, fournissent des exemples remarquables de systèmes totalement intégrables possédant un nombre infini de degrés de liberté. C'est la raison pour laquelle elles ont tant intéressé les mathématiciens, au point que beaucoup d'ouvrages sur les solitons sont fortement orientés vers les aspects mathématiques de la théorie.

Pourtant les solitons concernent aussi les physiciens et ils sont même devenus indispensables pour décrire des phénomènes tels que la propagation de certaines ondes en hydrodynamique, les ondes localisées dans les plasmas astrophysiques, la propagation de signaux dans les fibres optiques, ou des aspects beaucoup plus microscopiques comme les phénomènes de transport de charge dans les polymères conducteurs, les modes localisés dans des cristaux magnétiques, la dynamique de macromolécules biologiques comme l'ADN et les protéines par exemple. Bien entendu tous ces systèmes ne sont décrits qu'approximativement par les équations de la théorie des solitons. On parle alors de quasi-solitons. Mais la caractéristique remarquable des solitons est qu'ils sont exceptionnellement stables vis-à-vis des perturbations. Ils sont en outre ca-

pables de se former spontanément dans un système physique auquel on fournit de l'énergie, par exemple sous forme thermique, par une onde électromagnétique ou une action mécanique, même si l'excitation initiale ne correspond pas exactement à un soliton. C'est cette propriété qui fait tout l'intérêt des solitons en physique car, si un système possède des caractéristiques permettant l'existence de solitons, et nous verrons que c'est le cas pour beaucoup d'entre eux, il existe alors une très forte chance qu'une excitation intense conduise à leur formation.

Les solitons fournissent souvent une approche fructueuse pour décrire la physique d'un système non linéaire. Au lieu de faire une approximation linéaire, puis de traiter les non linéarités par perturbation, il peut être beaucoup plus efficace de décrire approximativement la physique du système par une équation à solitons puis, si nécessaire, de tenir compte des contributions qui perturbent les solitons.

L'objet de cet ouvrage est de traiter la *physique des solitons* en montrant comment ce concept intervient dans de nombreux domaines grâce à un parcours en trois étapes.

- La première partie présente les grandes classes d'équations à solitons à partir de situations tirées de la physique macroscopique. Dans chaque cas nous partons d'un exemple où l'observation directe des solitons est facile et nous montrons comment les équations physiques conduisent à des équations de champ non linéaires ayant des solutions solitons. Cette partie permet de comprendre les principales propriétés des solitons et les caractéristiques qu'un système physique doit présenter pour permettre leur existence. Le dernier chapitre de cette première étape discute plus en détails la modélisation en termes de solitons en s'appuyant sur la physique des plasmas. Il montre en particulier comment *un* système donné peut être décrit par *plusieurs* types d'équations à solitons, selon les conditions dans lesquelles on le place.

- La seconde partie introduit quelques méthodes mathématiques pour l'étude des solitons. Bien que les aspects mathématiques ne soient pas l'objectif principal de l'ouvrage, ces méthodes sont importantes pour les applications physiques car le système auquel on s'intéresse n'est jamais décrit exactement par une équation à solitons. Il faut donc pouvoir évaluer et étudier l'influence des termes que l'on a négligés quand on a proposé une description par une équation à solitons. Cette partie présente des techniques qui sont rarement introduites dans les ouvrages traitant de la théorie mathématique des solitons car elles concernent justement des systèmes qui ne sont pas exactement décrits par une équation à solitons. Le physicien a aussi besoin de savoir comment évolue dans le temps une condition initiale appliquée à un système. Pour répondre à cette question on peut faire appel à une méthode mathématique très élégante, la méthode d'inversion des données de diffusion, qui parvient à réduire la solution d'une équation non linéaire à une séquence d'opérations linéaires. Nous présentons une introduction à cette méthode.

- La dernière étape, constituée des troisième et quatrième parties de l'ouvrage, est consacrée à la physique microscopique – physique des solides ou physique des molécules biologiques – où les descriptions en termes de solitons ont permis de traiter de nombreux problèmes. À cette échelle on ne “voit” plus directement les solitons, mais on les détecte par leur influence sur les propriétés du système. Outre le passage des équations physiques aux équations à solitons, comme dans la première partie, il faut donc aussi discuter les méthodes d'observation des solitons. De plus, à ce niveau, les fluctuations thermiques ne sont plus négligeables. Elles peuvent interagir avec les solitons dont il faut étudier la dynamique dans un système qui n'est plus au repos. Par ailleurs, les solitons eux-mêmes interviennent directement dans les propriétés thermodynamiques du système que leur présence peut modifier. Nous verrons aussi, par exemple dans les ferroélectriques ou dans le cas de l'ADN, que le concept de soliton est très puissant pour étudier théoriquement la thermodynamique de certains systèmes.

La beauté de la science du non linéaire se situe sans doute dans les liens qu'elle tisse entre différents domaines qui partagent une description mathématique commune. Cette généralité n'est pas sans rappeler celle de la thermodynamique puisque dans les deux cas c'est la structure mathématique abstraite (qui dérive bien sûr des symétries et des lois de la physique) qui est cruciale. Cet ouvrage montre comment quelques équations fondamentales permettent de traiter des systèmes physiques extrêmement variés, du macroscopique au microscopique, unifiant ainsi des domaines que l'on considère souvent comme totalement différents tels que l'hydrodynamique et la dynamique des macromolécules biologiques.

Bien entendu il reste encore de nombreuses questions ouvertes dans la physique des systèmes non linéaires et les concepts que nous introduisons ici sont en train de pénétrer dans des domaines très différents tels que la biologie, la sociologie, l'économie, l'épidémiologie, l'écologie, . . . Nous espérons que cet ouvrage donnera au lecteur l'envie de s'aventurer dans l'exploration de ces questions ouvertes, en gardant à l'esprit l'étonnante capacité de nombreux systèmes à créer des structures spatiales cohérentes d'une remarquable stabilité qui peuvent influencer profondément leurs propriétés.

Chapitre 3

Solitons enveloppe et localisation non linéaire : l'équation de Schrödinger non linéaire

Les systèmes que nous avons étudiés jusqu'à présent (ondes à la surface de l'eau, chaîne électrique, chaînes de pendules,...) possèdent également des solutions de faible amplitude sous la forme d'ondes planes

$$\theta = A e^{i(qx - \omega t)} + \text{c.c.} \quad , \quad (3.1)$$

fondamentalement différentes des solutions solitons que nous avons considérées (nous rappelons que le sigle c.c. correspond à l'abréviation de complexe conjugué). Il est donc légitime de se demander ce que deviennent les ondes planes lorsque l'on augmente suffisamment leur amplitude pour que la non linéarité intervienne. La réponse que nous allons découvrir dans ce chapitre est que les ondes planes peuvent se moduler spontanément comme le montre la figure 3.1.

Cette modulation, qui provient des harmoniques apparues à cause de la non linéarité, peut se poursuivre jusqu'à la coupure de l'onde initiale en "paquets" d'ondes (cf. figure 3.1) dont les propriétés correspondent à celles des solitons. Ces solitons étant donc constitués d'une onde porteuse, modulée par un signal d'enveloppe, on leur donne le nom de *solitons-enveloppe*.

Nous allons montrer comment ils s'introduisent sur l'exemple simple de la chaîne de pendules étudiée au chapitre 3, puis nous verrons que l'équation qui les décrit est extrêmement générale en physique puisqu'elle apparaît naturellement dans la plupart de systèmes faiblement dispersifs et faiblement non linéaires qui, à la limite des faibles amplitudes, sont décrits par une équation d'ondes.

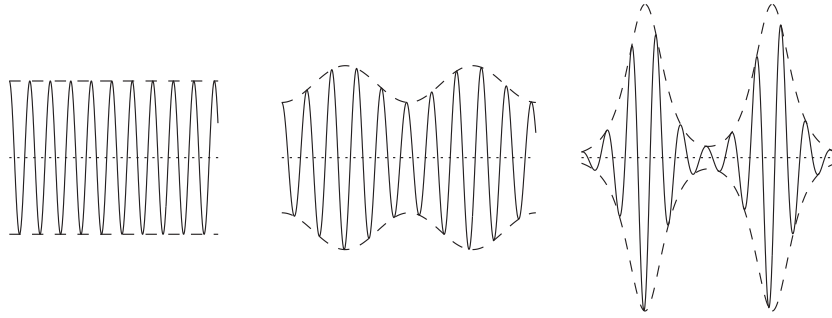


FIG. 3.1 – Modulation d'une onde plane. La courbe tiretée correspond à l'enveloppe de l'onde, représentée par la courbe continue. Les trois figures présentent trois états successifs de l'évolution de l'onde plane initiale.

3.1 Ondes non linéaires dans la chaîne de pendules : l'équation de NLS

Considérons l'équation de la dynamique de la chaîne de pendules dans la limite des milieux continus (équation de SG) :

$$\theta_{tt} - c_0^2 \theta_{xx} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad . \quad (3.2)$$

Nous avons déjà vu au chapitre 3 que cette équation, dans la limite linéaire, admettait des solutions en ondes planes. Nous allons maintenant étudier le régime des amplitudes moyennes en considérant de faibles non linéarités. Mathématiquement, cela signifie que nous n'allons tenir compte que du premier terme non linéaire du développement de $\sin \theta$ dans l'équation (3.2) :

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \mathcal{O}(\theta^5) \quad . \quad (3.3)$$

Comme on se place dans le cas d'une faible non linéarité, on pourrait penser à chercher la solution sous la forme d'un développement perturbatif dont le terme dominant serait l'onde plane, c'est-à-dire sous la forme

$$\theta = \varepsilon A e^{i(qx - \omega t)} + \varepsilon^2 B(x, t) \quad . \quad (3.4)$$

Cependant cette méthode ne peut donner de solution acceptable aux temps longs puisque l'on trouve que $B(x, t) \sim \varepsilon^2 t$, c'est-à-dire que la petite correction finit par diverger [113].

Il faut donc introduire une méthode permettant de contrôler ces divergences, que l'on appelle la *méthode des échelles multiples* et qui nous est suggérée par la forme de la solution, l'onde plane modulée (cf. figure 3.1) qui comporte plusieurs échelles de temps et d'espace :

- une variation rapide temporellement et spatialement au niveau de la porteuse,
- une variation beaucoup plus lente au niveau de l'enveloppe.

Le principe de la méthode est de chercher une solution qui dépend d'un ensemble de variables associées à ces différentes échelles : $T_i = \varepsilon^i t$ et $X_i = \varepsilon^i x$. On cherche donc θ sous la forme d'un développement perturbatif de fonctions de ces différentes variables

$$\theta(x, t) = \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \phi_i(X_0, X_1, X_2, \dots, T_0, T_1, T_2, \dots) \quad (3.5)$$

qui sont traitées comme des variables *indépendantes*. On doit remplacer les opérateurs dérivées par des sommes d'opérateurs de la façon suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial T_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{\partial T_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T_1} + \frac{\partial T_2}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \quad (3.6)$$

$$= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \quad (3.7)$$

La remarque essentielle est que toute solution de ce problème, *restreint à la ligne physique* ($T_0 = t$; $T_1 = \varepsilon t$; $T_2 = \varepsilon^2 t$; $T_3 = \varepsilon^3 t$; ...) sera solution du problème de départ. Hors de cette ligne physique, la solution n'a pas de signification physique. L'introduction des variables auxiliaires permet d'imposer les conditions adéquates de manière à éliminer les divergences et à construire un développement asymptotique uniformément convergent pour les valeurs faibles de ε .

En définissant la notation $D_i = \partial/\partial T_i$, on peut écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (3.8)$$

On note de manière analogue $D_{X_i} = \partial/\partial X_i$. Puis on reporte le développement (3.5), $\theta = \varepsilon \phi_0 + \varepsilon^2 \phi_1 + \varepsilon^3 \phi_2 + \dots$, dans l'équation (3.2) en utilisant des expressions telles que (3.6) et (3.8) pour exprimer ses dérivées, et identifier, comme dans un développement perturbatif classique, les différentes puissances de ε .

À l'ordre ε , on obtient l'équation suivante

$$(D_0^2 - c_0^2 D_{X_0}^2 + \omega_0^2) \phi_0 = 0 \quad , \quad (3.9)$$

c'est-à-dire une équation linéaire en ϕ_0 que l'on notera $\hat{L} \phi_0 = 0$. La solution de l'équation (3.9) est l'onde plane

$$\phi_0 = A(X_1, T_1, X_2, T_2, \dots) e^{i(qX_0 - \omega T_0)} + \text{c.c.} \quad , \quad (3.10)$$

dans laquelle ω et q sont liés par la relation de dispersion $\omega^2 = \omega_0^2 + c_0^2 q^2$ que l'on aurait également pu obtenir en linéarisant l'équation initiale (3.2).

Il existe cependant une différence importante avec la théorie des perturbations classiques puisque le facteur d'amplitude A n'est plus une constante mais une fonction qui dépend des autres échelles de temps et d'espace. Cette propriété donne des possibilités supplémentaires pour la solution, qu'il s'agit d'exploiter judicieusement. Au lieu d'essayer de résoudre l'équation non linéaire en ajoutant un terme à la solution linéaire, on va adapter la solution linéaire elle-même, avant, éventuellement, de lui ajouter des termes correctifs supplémentaires.

À l'ordre ε^2 , on trouve

$$D_0^2\phi_1 + 2D_0D_1\phi_0 - c_0^2D_{X_0}^2\phi_1 - 2c_0^2D_{X_0}D_{X_1}\phi_0 + \omega_0^2\phi_1 = 0 \quad (3.11)$$

qui peut se réécrire de la manière suivante

$$\hat{L}\phi_1 = -2D_0D_1\phi_0 + 2c_0^2D_{X_0}D_{X_1}\phi_0 \quad (3.12)$$

$$= 2i\omega \frac{\partial A}{\partial T_1} e^{i\sigma} + 2iqc_0^2 \frac{\partial A}{\partial X_1} e^{i\sigma} + \text{c.c.} \quad , \quad (3.13)$$

en introduisant $\sigma = qX_0 - \omega T_0$ pour simplifier l'écriture. On obtient donc pour déterminer ϕ_1 une équation linéaire forcée par des termes en $e^{i\sigma}$ qui sont des termes *résonants* pour l'opérateur \hat{L} . Cette situation est analogue à l'exemple familier d'un simple oscillateur excité exactement à sa fréquence de résonance. Elle conduit à une réponse qui tend à croître linéairement dans le temps. Ce cas est aussi fréquemment rencontré en astronomie où de tels termes conduisent à une variation très lente des orbites : on les appelle termes séculaires. Pour que le développement ait un sens, il faut éviter cette situation. Ceci est possible en *imposant une condition* à l'amplitude A de manière à annuler les termes du second membre qui sont résonants pour l'opérateur \hat{L} . C'est ce que l'on appelle la condition de solvabilité, qui s'écrit ici

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} + \frac{qc_0^2}{\omega} \frac{\partial A}{\partial X_1} = 0 \quad . \quad (3.14)$$

En reconnaissant que la quantité $v_g = qc_0^2/\omega$ est la vitesse de groupe de l'onde porteuse $e^{i\sigma}$, on réalise que l'équation (3.14) signifie que l'amplitude A ne dépend pas de X_1 et T_1 séparément mais uniquement à travers la quantité $\xi_1 = X_1 - v_g T_1$. On a donc

$$A(X_1, T_1, X_2, T_2, \dots) = A(X_1 - v_g T_1, X_2, T_2, \dots) \quad . \quad (3.15)$$

Après annulation des termes séculaires, l'équation (3.12) se réduit à $\hat{L}\phi_1 = 0$ qui admet la solution $\phi_1 = 0$. Toute autre solution serait de la même forme que ϕ_0 et pourrait être incorporée dans A .

À l'ordre ε^3 , on aboutit à l'équation

$$\begin{aligned} \hat{L}\phi_2 = & -D_1^2\phi_0 - 2D_0D_2\phi_0 + c_0^2D_{X_1}^2\phi_0 + 2c_0^2D_{X_0}D_{X_2}\phi_0 + \frac{\omega_0^2}{6}\phi_0^3 \\ & - 2D_0D_1\phi_1 + 2c_0^2D_{X_0}D_{X_1}\phi_1 \quad . \quad (3.16) \end{aligned}$$

C'est encore une équation linéaire forcée faisant toujours intervenir le même opérateur \hat{L} , qui pourrait à nouveau avoir un forçage résonant en raison de la présence de termes en $e^{i\sigma}$ dans le membre de droite. Il faut donc encore choisir la solution de manière à annuler ces termes séculaires, ce qui conduit à la condition

$$-\frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} + 2i\omega \frac{\partial A}{\partial T_2} + c_0^2 \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} + 2iqc_0^2 \frac{\partial A}{\partial X_2} + \frac{3}{6}\omega_0^2 |A|^2 A = 0 \quad , \quad (3.17)$$

en tenant compte de la condition $\phi_1 = 0$ obtenue à l'ordre ε^2 et en n'oubliant pas les termes résonants qui proviennent du développement de $\phi_0^3 = [A \exp(i\sigma) + A^* \exp(-i\sigma)]^3$.

Notons ici que si l'on avait fait le calcul de perturbation classique dans lequel A est une constante, il n'y aurait pas eu de termes résonants à l'ordre ε . En revanche, à l'ordre ε^2 , ce développement perturbatif poserait un problème puisque le terme non linéaire $|A|^2 A$ subsisterait à moins d'annuler purement et simplement la solution A . On trouverait que la solution particulière de l'équation

$$\hat{L} \phi_2 = \frac{\omega_0^2}{2} |A|^2 A e^{i\sigma} \quad . \quad (3.18)$$

est

$$\phi_2^p = \frac{i\omega_0^2}{4\omega} |A|^2 A T_2 e^{i\sigma} e^{i(qX_2 - \omega T_2)} \quad (3.19)$$

qui est proportionnelle à la variable temporelle T_2 , confirmant la croissance en $\varepsilon^2 t$ annoncée précédemment. Le développement perturbatif perdrait son sens puisque la "petite" perturbation finirait par diverger.

Après avoir annulé les termes séculaires, c'est-à-dire avoir précisé l'expression de A vérifiant l'équation (3.17), on trouve que ϕ_2 s'exprime en fonction de $e^{3i\sigma}$. La solution à l'ordre ε^2 est par conséquent du type

$$\theta = \varepsilon (A e^{i\sigma} + \text{c.c.}) + \varepsilon^3 (B e^{3i\sigma} + \text{c.c.}) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) + \dots \quad . \quad (3.20)$$

En fait on se contente souvent de la solution au premier ordre puisqu'elle tient déjà compte de la non linéarité grâce à la variation de l'amplitude A , régie par l'équation (3.17).

Notons enfin qu'il est possible de simplifier l'équation (3.17) en se plaçant, comme à l'ordre ε , dans le repère mobile à la vitesse v_g . En introduisant, les variables $\xi_i = X_i - v_g T_i$ et $\tau_i = T_i$, soit

$$\frac{\partial A}{\partial T_i} = \frac{\partial A}{\partial \tau_i} - v_g \frac{\partial A}{\partial \xi_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial A}{\partial X_i} = \frac{\partial A}{\partial \xi_i} \quad , \quad (3.21)$$

on obtient

$$\frac{\partial A}{\partial \tau_1} = 0 \quad (3.22)$$

en tenant compte de la condition (3.14), ce qui conduit aux égalités

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} = -v_g \frac{\partial A}{\partial \xi_1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} = v_g^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} \quad . \quad (3.23)$$

Dans le repère mobile, l'équation (3.17) peut donc s'écrire

$$(c_0^2 - v_g^2) \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} + 2i\omega \left(\frac{\partial A}{\partial \tau_2} - v_g \frac{\partial A}{\partial \xi_2} \right) + 2iqc_0^2 \frac{\partial A}{\partial \xi_2} + \frac{1}{2}\omega_0^2 |A|^2 A = 0 \quad . \quad (3.24)$$

En utilisant la valeur de la vitesse de groupe $v_g = qc_0^2/\omega$, les termes en $\partial A/\partial \xi_2$ s'annulent et il reste après division par 2ω ,

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau_2} + \frac{(c_0^2 - v_g^2)}{2\omega} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} + \frac{\omega_0^2}{4\omega} |A|^2 A = 0 \quad , \quad (3.25)$$

que l'on appelle équation de Schrödinger Non Linéaire (NLS) et qui décrit l'évolution de l'enveloppe A .

Nous avons fait le calcul en partant de l'équation de sine-Gordon, c'est-à-dire de l'équation obtenue après l'approximation des milieux continus, valable pour des ondes porteuses de grandes longueurs d'ondes. Il est cependant possible de faire un calcul analogue à partir des équations discrètes

$$\frac{d^2 \theta_n}{dt^2} - c_0^2 (\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n) + \omega_0^2 \sin \theta_n = 0 \quad (3.26)$$

en conservant la porteuse discrète et régie par la relation de dispersion $\omega^2 = \omega_0^2 + 4c_0^2 \sin^2(q/2)$ et en faisant l'approximation des milieux continus seulement pour l'enveloppe. On obtient alors une équation de Schrödinger Non Linéaire dont les coefficients dépendent du vecteur d'onde q de la porteuse. Ce calcul [132] correspond à l'*approximation semi-discrète* qui est présentée dans la partie 15.2.2.

3.2 Propriétés de l'équation de Schrödinger Non Linéaire

Écrivons l'équation (3.25) avec sa notation usuelle

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + P \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + Q |\psi|^2 \psi = 0 \quad , \quad (3.27)$$

où P et Q sont des coefficients qui dépendent du problème considéré de même que la signification des variables t et x . Le nom de l'équation est évidemment lié à sa structure, très similaire à celle de l'équation de Schrödinger

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-P \frac{\partial^2}{\partial x^2} - Q |\psi|^2 \right] \psi \quad . \quad (3.28)$$

Pour que l'équation (3.27) soit formellement analogue à l'équation de Schrödinger, il faut que le coefficient P soit positif. En fait on peut toujours se ramener à ce cas. En effet, si $P < 0$, il suffit de changer le signe de l'équation et de prendre le complexe conjugué de l'équation de manière à changer le signe devant la dérivée temporelle pour parvenir à une équation pour ψ^* dans laquelle le coefficient de $\partial^2\psi^*/\partial x^2$ est positif. On pourra donc sans restriction se limiter au cas P positif. Notons que la transformation qui permet de se ramener à ce cas ne change pas le signe du produit PQ (qui, comme nous le verrons, a une importance déterminante sur la forme des solutions) car elle change simultanément les signes de P et Q .

Le terme correspondant au "potentiel" de l'équation de Schrödinger étant égal à $-Q|\psi|^2$, il dépend de la solution ψ , ce qui explique la dénomination *non linéaire*.

Nous verrons que, lorsque le paramètre Q est positif, la solution pour ψ est localisée, en forme de cloche. Cela correspond à un "puits de potentiel" pour le terme $-Q|\psi|^2$, qui est justement une condition nécessaire¹ pour avoir une solution *localisée* spatialement de l'équation de Schrödinger. Ainsi l'équation de NLS est telle que ψ "creuse son propre puits de potentiel". On a un phénomène d'autofocalisation (appelé aussi "self-trapping"). C'est un effet essentiel du point de vue physique, puisqu'il met en évidence la possibilité de localisation par effet non linéaire, phénomène totalement différent de celui de la localisation due au désordre, fréquemment rencontrée en physique et généralement appelée localisation d'Anderson.

3.2.1 La solution soliton de l'équation de NLS

L'équation de NLS étant complexe, on cherche une solution sous la forme

$$\psi = \phi(x, t) e^{i\theta(x, t)} \quad (3.29)$$

où ϕ et θ sont des fonctions *réelles*. En choisissant convenablement le facteur de phase θ , on peut se restreindre aux valeurs positives pour l'amplitude ϕ .

En reportant cet ansatz dans l'équation de NLS (3.27), et en séparant parties réelle et imaginaire, on obtient le système d'équations suivant :

$$-\phi \theta_t + P\phi_{xx} - P\phi \theta_x^2 + Q\phi^3 = 0 \quad (3.30)$$

$$\phi_t + P\phi \theta_{xx} + 2P\phi_x \theta_x = 0 \quad (3.31)$$

Nous allons chercher une solution particulière dont la porteuse θ se propage à la vitesse u_p en gardant sa forme et l'enveloppe ϕ se propage à la vitesse u_e en gardant également sa forme. C'est-à-dire que nous cherchons une solution sous la forme

$$\phi(x, t) = \phi(x - u_e t) \quad \text{et} \quad \theta(x, t) = \theta(x - u_p t) \quad (3.32)$$

¹C'est même une condition nécessaire et suffisante lorsque l'on résout l'équation de Schrödinger à *une* dimension et que le potentiel est négatif.

Il faut bien réaliser que contrairement à la méthode utilisée pour les équations de KdV et de SG, nous ne recherchons pas ici de solution se propageant sans déformation puisqu'ici u_p et u_e sont *a priori* différentes.

Grâce à ces hypothèses, le système d'équations (3.30) et (3.31) se simplifie pour donner

$$u_p \phi \theta_x + P \phi_{xx} - P \phi \theta_x^2 + Q \phi^3 = 0 \quad (3.33)$$

$$-u_e \phi_x + P \phi \theta_{xx} + 2P \phi_x \theta_x = 0 \quad . \quad (3.34)$$

L'équation (3.34) s'intègre alors facilement après multiplication par ϕ et conduit à

$$-\frac{u_e}{2} \phi^2 + P \phi^2 \theta_x = C \quad , \quad (3.35)$$

où C est une constante. La méthode utilisée jusqu'ici est très générale et peut conduire à plusieurs types de solutions selon les conditions aux limites choisies qui déterminent les valeurs de la constante C . On pourrait en particulier obtenir des trains d'ondes non linéaires très utiles dans la description de certains phénomènes hydrodynamiques.

Ici nous allons chercher les solutions localisées spatialement pour découvrir la solution soliton de l'équation de NLS. Cela revient à imposer que les fonctions ϕ et ϕ_x tendent vers zéro lorsque $|x|$ tend vers l'infini ; on note facilement que la constante est donc nulle et l'on obtient alors

$$\theta_x = \frac{u_e}{2P} \quad , \quad (3.36)$$

si l'on exclut évidemment les solutions d'amplitude ϕ identiquement nulle. Par intégration, on obtient directement

$$\theta = \frac{u_e}{2P} (x - u_p t) + C' \quad (3.37)$$

mais l'on peut imposer à la constante C' d'être nulle en choisissant l'origine des temps.

En reportant cette expression dans l'équation (3.33), on obtient

$$\frac{u_e u_p}{2P} \phi + P \phi_{xx} - \frac{u_e^2}{4P} \phi + Q \phi^3 = 0 \quad (3.38)$$

qui s'intègre facilement après multiplication par $P \phi_x$ et donne

$$\frac{P^2}{2} \phi_x^2 + V_{\text{eff}}(\phi) = 0 \quad (3.39)$$

en définissant, comme nous l'avons fait lors de l'étude de KdV, une "pseudo-énergie"

$$V_{\text{eff}}(\phi) = \frac{PQ}{4} \phi^4 - \frac{(u_e^2 - 2u_e u_p)}{8} \phi^2 \quad . \quad (3.40)$$

La constante d'intégration a été choisie à nouveau nulle puisque l'on cherche toujours une solution localisée spatialement.

La solution ϕ étant réelle, $\phi_x^2 \geq 0$, et l'équation (3.39) implique donc $V_{\text{eff}}(\phi) \leq 0$ pour toutes les valeurs de ϕ correspondant à une solution. Cela doit être vrai en particulier au voisinage de $\phi = 0$ puisque cet état correspond à la valeur pour $|x|$ tendant vers l'infini. Or, pour $\phi \rightarrow 0$, l'expression de $V_{\text{eff}}(\phi)$ est dominée par le terme en ϕ^2 . On doit donc avoir $(u_e^2 - 2u_e u_p) \geq 0$. Les vitesses u_e et u_p peuvent être positives ou négatives mais on note que $u_e = u_p$ ne peut pas convenir.

En utilisant à nouveau le raisonnement de “pseudo-potentiel” qui revient à considérer l'équation (3.39) comme l'équation d'un mouvement à énergie nulle pour une particule, on constate qu'il n'existe de “mouvement” borné à partir de l'état $\phi = 0$ que dans le cas où le produit PQ est positif (cf. figure 3.2). Cette méthode met donc en évidence que *l'équation de NLS ne peut avoir de solution localisée spatialement de type soliton qu'à la condition que le produit PQ soit positif.*

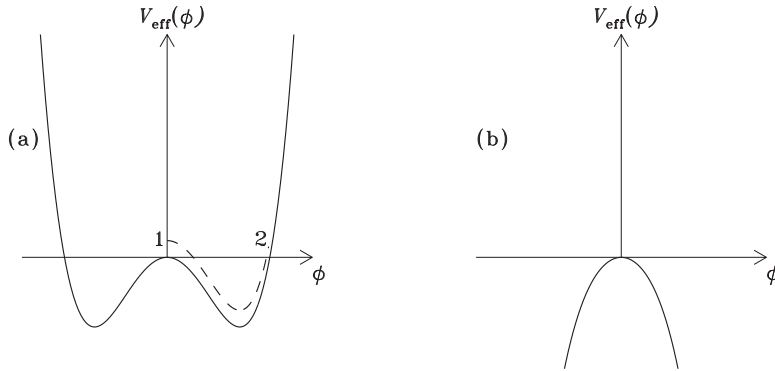


FIG. 3.2 – Allure du pseudo-potentiel $V_{\text{eff}}(\phi)$ lorsque $PQ > 0$ (a) et $PQ < 0$ (b). Noter que, pour la solution de l'équation de NLS dans laquelle ϕ évolue entre les points 1 et 2, $V_{\text{eff}}(\phi)$ est bien négatif dans tout le domaine de variation de ϕ .

Ce mouvement part de l'état $\phi = 0$ (noté 1 sur la figure 3.2) pour atteindre $\phi = \phi_0 = \sqrt{(u_e^2 - 2u_e u_p)/2PQ}$ (noté 2), puis revient à son point initial.

La forme de la solution s'obtient en intégrant l'équation (3.39), et l'on trouve en utilisant le changement de variable $\phi = \phi_0 \operatorname{sech} v$, l'expression

$$\phi = \phi_0 \operatorname{sech} \left[\sqrt{\frac{Q}{2P}} \phi_0 (x - u_e t) + \operatorname{Arc} \operatorname{sech} \frac{\phi(0,0)}{\phi_0} \right] . \quad (3.41)$$

On peut choisir l'origine des positions x pour éliminer la constante, ce qui revient à placer, à $t = 0$, le centre du soliton $\phi = \phi_0$ à l'origine.

On obtient finalement la solution suivante pour l'équation de NLS

$$\psi(x, t) = \phi_0 \operatorname{sech} \left[\sqrt{\frac{Q}{2P}} \phi_0 (x - u_e t) \right] e^{i \frac{u_e}{2P} (x - u_p t)} \quad (3.42)$$

$$\text{avec } \phi_0 = \sqrt{\frac{u_e^2 - 2u_e u_p}{2PQ}}, \quad PQ > 0 \quad \text{et} \quad u_e^2 - 2u_e u_p \geq 0 \quad . \quad (3.43)$$

Notons qu'on n'obtient pas de solution pour $u_e = u_p$, ce qui signifie qu'il n'est pas possible d'obtenir une solution à profil constant pour l'équation NLS comme cela avait été possible pour les équations KdV ou SG. On peut aussi écrire la solution sous la forme

$$\psi = \phi_0 \operatorname{sech} \left(\frac{x - u_e t}{L_e} \right) e^{i(\kappa x - \mu t)} \quad , \quad (3.44)$$

avec

$$L_e = \frac{1}{\phi_0} \sqrt{\frac{2P}{Q}}, \quad \kappa = \frac{u_e}{2P} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{u_e u_p}{2P} \quad , \quad (3.45)$$

qui met en évidence que la solution de NLS a elle-même la forme d'un paquet d'ondes de largeur L_e inversement proportionnelle à l'amplitude ϕ_0 . Par conséquent, lorsque son amplitude diminue, sa largeur augmente et l'on retrouve donc bien l'idée que la localisation de la solution est due à la non linéarité. Dans la limite des faibles amplitudes (limite linéaire), on obtient ainsi une solution infiniment étendue, l'onde plane.

Notons également que si l'on considère une solution de faible amplitude de l'équation NLS ($\phi_0 \approx \varepsilon$), l'équation (3.45) conduit à $u_e \approx \varepsilon$ et $u_p \approx \varepsilon$. On constate alors que, dans la solution, les termes en x sont affectés soit d'un facteur ϕ_0 soit d'un facteur u_e , c'est-à-dire d'ordre ε tandis que les termes en t sont affectés des coefficients $\phi_0 u_e$ ou $u_e u_p$ qui sont d'ordre ε^2 . On retrouve les ordres de grandeur auxquels avait conduit l'obtention de l'équation NLS par le développement en échelles multiples à partir de l'équation SG puisqu'on parvenait à une équation en ξ_1 et τ_2 .

3.2.2 La localisation de l'énergie par instabilité modulationnelle

Nous venons de voir que l'équation de NLS possède une solution localisée de type soliton dans le cas où ses coefficients vérifient la condition $PQ > 0$. En fait, cette condition correspond à une situation dans laquelle l'énergie tend à se localiser spontanément dans le système grâce au phénomène d'instabilité modulationnelle.

En effet, outre la solution soliton, l'équation de NLS possède une solution en onde plane, mais celle-ci n'est pas toujours stable. Si l'on reporte la solution

$\psi(x, t) = A_0 e^{i(\kappa x - \Omega t)}$ dans l'équation de NLS (3.27), on constate que c'est une solution exacte si la pulsation Ω vérifie la relation de dispersion

$$\Omega = P\kappa^2 - QA_0^2 \quad . \quad (3.46)$$

Cette relation constitue la *relation de dispersion non linéaire* de l'onde plane qui met en évidence que sa pulsation dépend non seulement de son vecteur d'onde, mais aussi de son amplitude A_0 . Comme nous allons le voir, cette solution, qui existe quel que soit le signe du produit PQ , n'est stable que si $PQ < 0$.

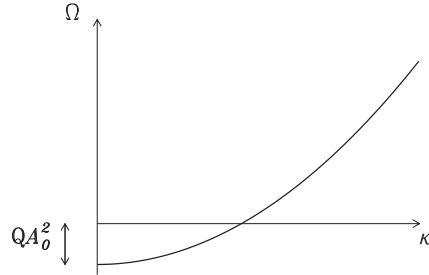


FIG. 3.3 – Relation de dispersion non linéaire de l'équation de NLS.

Pour le vérifier, étudions sa stabilité linéaire en cherchant quelle est l'évolution temporelle d'une petite perturbation de sa phase et de son amplitude. On reporte dans l'équation de NLS l'expression suivante,

$$\psi(x, t) = [A_0 + b(x, t)] e^{i[\kappa x - \Omega t + \theta(x, t)]} \quad , \quad (3.47)$$

où b et θ sont deux fonctions réelles des variables x et t . En ne conservant que les termes linéaires en b et θ qui sont supposés petits, puis en séparant les parties réelle et imaginaire et en tenant compte des termes qui s'éliminent grâce à la relation de dispersion (3.46) qui apparaît en facteur de $A_0 + b$ dans l'expression que l'on obtient, on parvient au système linéaire suivant

$$-A_0 \theta_t + P b_{xx} - 2P A_0 \kappa \theta_x + 2Q A_0^2 b = 0 \quad (3.48)$$

$$b_t + P A_0 \theta_{xx} + 2P \kappa b_x = 0 \quad , \quad (3.49)$$

qui admet des solutions de la forme

$$b = b_0 e^{i(\delta x - \nu t)} + \text{c.c.} \quad \text{et} \quad \theta = \theta_0 e^{i(\delta x - \nu t)} + \text{c.c.} \quad . \quad (3.50)$$

En effet, en reportant ces solutions dans les équations (3.48) et (3.49), on note que le système est bien satisfait pourvu que l'on impose des relations liant b_0 et θ_0

$$(2Q A_0^2 - P \delta^2) b_0 + i A_0 (\nu - 2P \kappa \delta) \theta_0 = 0 \quad (3.51)$$

$$-i(\nu - 2P \kappa \delta) b_0 - P A_0 \delta^2 \theta_0 = 0 \quad . \quad (3.52)$$

Ce système homogène n'aura de solution non nulle pour b_0 et θ_0 qu'à la condition que son déterminant soit nul, ce qui donne la relation de dispersion de la perturbation

$$(\nu - 2P\kappa\delta)^2 = P^2\delta^2 \left(\delta^2 - \frac{2Q}{P}A_0^2 \right) . \quad (3.53)$$

On note immédiatement que le comportement de ν pour un vecteur d'onde donné δ dépend du signe de Q/P .

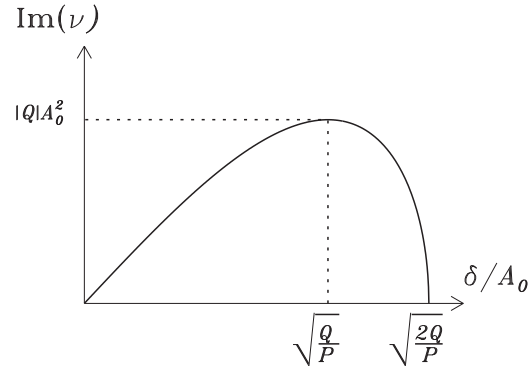
- Si $Q/P < 0$ (soit $PQ < 0$), $(\nu - 2P\kappa\delta)^2$ est égal à un terme positif quelles que soient les valeurs δ . En résolvant pour ν on trouve une valeur réelle qui indique que les perturbations b et θ oscillent en conservant une amplitude maximale constante. L'onde plane (3.47) solution de NLS est donc *stable* pour $PQ < 0$. On dit que l'on a stabilité marginale; les perturbations conservent une amplitude constante, sans s'atténuer.
- Si $Q/P > 0$ ($PQ > 0$), il existe un domaine du vecteur d'onde δ de la perturbation pour lequel $(\nu - 2P\kappa\delta)^2$ est négatif. Dans cette région, on a alors

$$\nu = 2P\kappa\delta \pm i|P\delta|\sqrt{\frac{2Q}{P}A_0^2 - \delta^2} \quad (3.54)$$

et ν comporte par conséquent une partie imaginaire non nulle; le terme en $e^{-i\nu t}$ conduit à une croissance exponentielle de la perturbation et l'onde plane est *instable*. Elle a tendance à se moduler avec le vecteur d'onde correspondant à la valeur de δ donnant le taux de croissance $\text{Im}(\nu)$ maximal, c'est-à-dire $\delta = A_0\sqrt{Q/P}$ comme le montre la figure 3.4.

Ce phénomène d'instabilité modulationnelle correspond à une *localisation d'énergie induite par la non linéarité* puisque l'on note que le taux de croissance maximal, $|Q|A_0^2$, est d'autant plus grand que le coefficient mesurant la non linéarité Q est grand ou que l'amplitude de l'onde A_0 est grande. On peut noter que le taux de croissance de l'instabilité d'une onde dépend seulement de son amplitude A_0 mais non de son vecteur d'onde κ (ou de sa pulsation Ω).

Dans le cas $PQ > 0$, qui correspond au domaine d'existence des solitons, l'étude de l'évolution à long terme d'une onde plane injectée dans le système montre que, après la phase de modulation résultant de la croissance de la petite perturbation, que l'on peut déduire de l'analyse de stabilité linéaire, le même type d'évolution se poursuit au point que l'amplitude de l'onde s'annule complètement dans certaines zones. On obtient un train de solitons, qui s'est formé spontanément par *instabilité modulationnelle* de l'onde. On vérifie donc à nouveau que, dans leur domaine d'existence, les solitons sont les excitations stables du système et qu'ils se forment spontanément. Cette instabilité d'une onde plane est parfois appelée, instabilité de Benjamin-Feir, en l'honneur de ceux qui l'ont découverte pour les trains de vagues à la surface de l'eau [24].

FIG. 3.4 – Taux de croissance $\text{Im}(\nu)$ en fonction du vecteur d'onde δ/A_0 .

3.2.3 Relation entre le breather de SG et le soliton de NLS

Nous avons obtenu l'équation de NLS (3.25) à partir d'un développement en échelles multiples de l'équation de sine-Gordon, puis en cherchant une solution de faible amplitude dont le terme dominant est finalement de la forme

$$\theta = \varepsilon A(\xi_1, \tau_2) e^{i(qX_0 - \omega T_0)} + \text{c.c.} \quad (3.55)$$

Comme nous avons noté également que la solution breather de SG peut avoir une amplitude faible et qu'elle correspond à une solution oscillante localisée spatialement, elle apparaît comme qualitativement semblable au soliton de NLS qui comporte une enveloppe modulant une porteuse oscillante. Il doit donc exister une relation entre ces deux solutions et nous allons en effet vérifier que la limite faible amplitude du breather de SG coïncide avec la solution soliton de l'équation de NLS. C'est la raison pour laquelle, on nomme parfois le soliton de NLS, solution "breather" de NLS par abus de langage.

Notons avant tout que si l'on souhaite obtenir une solution de type breather avec le soliton de NLS, il faut supprimer l'oscillation spatiale de la porteuse en considérant le cas où le vecteur d'onde q est nul. Compte tenu de la relation de dispersion $\omega^2 = \omega_0^2 + c_0^2 q^2$ de l'équation de SG, cela impose que l'excitation correspondante se trouve au bas de la bande de phonons et que la vitesse de groupe soit nulle. Les variables ξ et τ du repère mobile à la vitesse v_g se réduisent par conséquent aux variables ordinaires, et l'équation de NLS qui correspond à SG se réduit dans ce cas à

$$i \frac{\partial A}{\partial T_2} + \frac{c_0^2}{2\omega_0} \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} + \frac{\omega_0}{4} |A|^2 A = 0 \quad (3.56)$$

Pour comparer avec la solution breather de SG fixe spatialement, il faut chercher la solution de NLS correspondante dont l'enveloppe ne se propage pas