Existence globale pour le système d'Euler axisymétrique

Hammadi Abidi
Université Rennes1
(en collaboration avec T. Hmidi et S. Keraani)

http://perso.univ-rennes1.fr/hamadi.abidi/

Système d'Euler :

$$(\mathrm{E})\begin{cases} \partial_t u + (u\cdot\nabla)u + \nabla\pi = 0, & (t,x)\in(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3) \\ \mathrm{div}\, u = 0, \\ u_{|t=0} = u_0. \end{cases}$$

avec $u = (u^1, u^2, u^3)$ le champ des vitesses et π la pression vérifiant :

$$\Delta\pi = -\mathrm{div}(u\cdot\nabla u).$$

Formulation vorticité :

$$\omega = \mathrm{rot}\ u = \nabla\wedge u.$$

$$\partial_t\omega + (u\cdot\nabla)\omega - (\omega\cdot\nabla)u = 0.$$

<u>Théorie de Littlewood-Paley</u>.

Il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$ et $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ positives radiales :

$$\chi(\xi) + \sum_{q \in \mathbb{N}} \varphi(2^{-q}\xi) = 1 \qquad \forall \xi.$$

<u>Décomposition inhomogène</u> : $u \in \mathcal{S}'$

$$\Delta_{-1} u = \chi(\mathrm{D}) u, \quad \forall q \in \mathbb{N}, \;\; \Delta_q u = \varphi(2^{-q}\mathrm{D}) u$$

$$S_q u = \sum_{-1 \leq j \leq q-1} \Delta_j u.$$

$s \in \mathbb{R}$, $(p_1, p_2) \in [1, \infty]^2$ et $u \in \mathcal{S}'$

$$u \in B^s_{p_1, p_2} \Longleftrightarrow 2^{qs} \|\Delta_q u\|_{L^{p_1}} \in l^{p_2}(\{-1\} \cup \mathbb{N}).$$

<u>Espace de Lorentz</u> : soient $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$

$$L^{p,q} = [L^1, L^\infty]_{(1-1/p, q)}$$

Existence locale :

- T. Kato (1972) : $u_0 \in H^s$, $s > 5/2$.
- Résultats semblables pour $X \hookrightarrow W^{1,\infty}$ ($X = W^{s,p}, B^s_{p,r}, s > 3/p + 1.$)
- D. Chae (2004) : $u_0 \in B^{1+3/p}_{p,1}, 1 < p \leq \infty.$

Critère d'explosion : B-K-M :

- Soit T^* le temps maximal d'existence. Alors
$$T^* < \infty \Rightarrow \int_0^{T^*} \|\nabla u(\tau)\|_{L^\infty} d\tau = +\infty.$$
- Beale-Kato-Majda (1984) :

si $u_0 \in H^s, s > 5/2$ alors
$$T^* < \infty \Rightarrow \int_0^{T^*} \|\omega(t)\|_{L^\infty} dt = +\infty.$$

Existence globale : *données axisymétriques*

• Un champ $u = (u^1, u^2, u^3)$ est dit axisymétrique si :

$$u = u^r(r,z)e_r + u^z(r,z)e_z$$

où $\Big(e_r, e_\theta, e_z\Big)$ est la base cylindrique de $\mathbb{R}^3$.

• Dans ce cas la vorticité vérifie

$$\omega = \mathrm{rot}\, u = (\partial_z u^r - \partial_r u^z)e_\theta,$$

$$\partial_t \omega + (u\cdot\nabla)\omega = (u^r/r)\omega.$$

• Si l'on pose $\alpha := \omega/r$, alors

$$\partial_t \alpha + (u\cdot\nabla)\alpha = 0.$$

$$\|\alpha(t)\|_{L^p} = \|\alpha_0\|_{L^p}, \qquad \forall\, 1 \le p \le \infty.$$

Existence Globale :

- M. Ukhovskii et V. Yudovitch (1968) :
$u_0 \in L^2$, $\omega_0 \in L^\infty$ et $\omega_0/r \in L^2 \cap L^\infty$.

• On utilise :

$$\begin{aligned}
\|\omega(t)\|_{L^\infty} &\leq \|\omega^0\|_{L^\infty} + \int_0^t \|u(\tau)\|_{L^\infty} \|\omega(\tau)/r\|_{L^\infty} d\tau \\
&\lesssim 1 + \int_0^t \|u(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \\
&\lesssim 1 + t + \int_0^t \|\omega(\tau)\|_{L^\infty} d\tau.
\end{aligned}$$

- T. Shirota et T. Yanagisawa (1994) : H^s, $s > 5/2$.
• Le point crucial est

$$|u^r/r| \lesssim \frac{1}{|\cdot|^2} \star \frac{|\omega|}{r}.$$

- R. Danchin : Pour des données de type Yudovitch

$$\omega_0 \in L^\infty \cap L^{3,1} \ \text{ et } \ \omega_0/r \in L^{3,1}.$$

Un espace fonctionnel

On définit l'espace

$$\widetilde{B}^0_{\infty,1} := \Big\{ v; \quad \sum_{-1}^{\infty} \|v - S_q v\|_{L^\infty} < \infty \Big\}.$$

Théorème 1. *(A-H-K)*

Soit u_0 *de divergence nulle tel que*

$$1)\ u_0 \in B^{\frac{3}{p}+1}_{p,1}, \quad p \in [1, \infty]$$

$$2)\ \frac{\omega_0}{r} \in L^{3,1}$$

$$3)\ \omega_0 \in \widetilde{B}^0_{\infty,1}.$$

Alors il existe une unique solution

$$u \in C(\mathbb{R}_+;\ B^{1+\frac{3}{p}}_{p,1}).$$

Quelques remarques :

1) Si $p < 3$, alors

$$\|\omega/r\|_{L^{3,1}} \lesssim \|u\|_{B^{\frac{3}{p}+1}_{p,1}}.$$

En effet :

- $B^{\frac{3}{p}-1}_{p,1} \hookrightarrow L^{3,1}$

- $\|\omega/r\|_{L^{3,1}} \lesssim \|\nabla\omega\|_{L^{3,1}}$

2) $B^{\frac{3}{p}}_{p,1} \hookrightarrow B^0_{\infty,1}$, pour $p \in [1,\infty]$

$$\Big\{\omega; \quad \sum_q (q+2)\|\Delta_q\omega\|_{L^\infty}\Big\} \hookrightarrow \widetilde{B}^0_{\infty,1} \hookrightarrow B^0_{\infty,1}.$$

Démonstration :

1) $\frac{u^r}{r} \in L^\infty_{\mathrm{loc}} L^\infty$ 2) $\omega \in L^\infty_{\mathrm{loc}} L^\infty$

3) $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(C^1_* = B^1_{\infty,\infty})$

4) $\omega \in L^\infty_{\mathrm{loc}} B^0_{\infty,1} \Rightarrow u \in L^\infty_{\mathrm{loc}} W^{1,\infty}$

• On utilise pour le point 1 le résultat (S-Y)

$$|u^r/r| \lesssim \frac{1}{|\cdot|^2} \star \frac{|\omega|}{r},$$

combiné avec $\frac{1}{|\cdot|^2} \in L^{\frac{3}{2},\infty}$+ les inégalités de convolutions :

$$\|u^r(t)/r\|_{L^\infty} \lesssim \|\omega(t)/r\|_{L^{3,1}} \lesssim \|\omega_0/r\|_{L^{3,1}}.$$

• Pour le point 2 on utilise le lemme de Gronwall.

• On utilise pour le 3 :

$$\|u\|_{C^1_*} \lesssim \|u\|_{L^\infty} + \|\omega\|_{L^\infty}.$$

• Le dernier point est plus délicat.

Pour $q \geq -1$ on définie $\tilde{\omega}_q$ l'unique solution

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\omega}_q + (u \cdot \nabla)\tilde{\omega}_q = u^r \frac{\tilde{\omega}_q}{r} \\ \tilde{\omega}_{q|t=0} = \Delta_q \omega_0. \end{cases}$$

Par linéarité et unicité, on a

$$\omega(t,x) = \sum_{q \geq -1} \tilde{\omega}_q(t,x).$$

Le principe du maximum donne

$$\|\tilde{\omega}_q(t)\|_{L^\infty} \leq \|\omega_q(0)\|_{L^\infty} e^{\|u^r/r\|_{L^1_t L^\infty}}$$

$$\|\mathcal{R}_j(t)\|_{L^\infty} \leq \|\mathcal{R}_j(0)\|_{L^\infty} e^{\|u^r/r\|_{L^1_t L^\infty}},$$

avec $\mathcal{R}_j(t,x) = \sum_{q \geq j} \tilde{\omega}_q(t,x)$.

Nous avons aisément

$$\tilde\omega_q = (\tilde\omega_q^1, \tilde\omega_q^2, 0) \quad \text{et} \quad u^r/r = u^1/x = u^2/y.$$

L'équation de $\tilde\omega_q^1$ devient

$$\partial_t \tilde\omega_q^1 + (u\cdot\nabla)\tilde\omega_q^1 = u^2 \frac{\tilde\omega_q^1}{y}.$$

Un résultat classique de propagation donne

$$\|\tilde\omega_q^1\|_{C^{\frac12}} \lesssim \Big(\|\Delta_q \omega_0\|_{C^{\frac12}} + \int_0^t \|u\|_{C^{\frac12}} \|\tilde\omega_q^1/y\|_{C^{\frac12}} d\tau\Big) e^{U(t)}$$

avec

$$U(t) := \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{L^\infty} d\tau.$$

D'un autre côté,

$$\begin{cases} \partial_t \tilde\omega_q^1/y + (u\cdot\nabla)\tilde\omega_q^1/y = 0 \\ \tilde\omega_q^1/y_{|t=0} = \Delta_q \omega_0^1/y. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\|\tilde\omega_q^1/y\|_{C^{\frac12}} \le \|(\Delta_q \omega_0^1)/y\|_{C^{\frac12}} e^{U(t)}.$$

Lemme 1. *Nous avons*

$$\left\|(\Delta_q {\omega_0}^1)/y\right\|_{C^{\frac{1}{2}}} \lesssim 2^{\frac{3}{2}q}\|\Delta_q\omega_0\|_{L^\infty}.$$

Ainsi

$$\|\tilde{\omega}_q^1/y\|_{C^{\frac{1}{2}}} \lesssim 2^{\frac{3}{2}q}\|\Delta_q\omega_0\|_{L^\infty}e^{U(t)}.$$

Et par suite

$$\|\tilde{\omega}_q^1\|_{C^{\frac{1}{2}}} \lesssim (1+t)2^{\frac{3}{2}q}\|\Delta_q\omega_0\|_{L^\infty}e^{U(t)}.$$

C-à-d

$$\|\Delta_j\tilde{\omega}_q^1\|_{L^\infty} \lesssim 2^{-\frac{1}{2}(j-3q)}\|\Delta_q\omega_0\|_{L^\infty}e^{U(t)}.$$

Il en découle

$$\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} = \sum_{j\geq -1} \|\Delta_j \sum_{q\geq -1} \tilde{\omega}_q(t)\|_{L^\infty}$$

$$\leq \underbrace{\sum_{j-3q\geq N} 2^{-\frac{1}{2}(j-3q)} \|\Delta_q \omega_0\|_{L^\infty} e^{U(t)}}_{I}$$

$$+ \underbrace{\sum_{0\leq j-3q\leq N} \|\Delta_q \omega_0\|_{L^\infty}}_{II}$$

$$+ \sum_{j\geq -1} \| \underbrace{\sum_{q\geq [j/3]} \tilde{\omega}_q(t)}_{R_{[j/3]}(t)} \|_{L^\infty}.$$

Pour les deux premiers termes on a

$$I \lesssim 2^{-\frac{N}{2}} \|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}} e^{U(t)} \quad \text{et} \quad II \lesssim N \|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}}.$$

Pour le dernier, rappelons que

$$\|R_{[j/3]}(t)\|_{L^\infty} \lesssim \|R_{[j/3]}(0)\|_{L^\infty} = \|\omega_0 - S_{[j/3]}\omega_0\|_{L^\infty}.$$

D'où

$$\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \lesssim \|\omega_0\|_{\widetilde{B}^0_{\infty,1}} + \|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}}\Big(N + 2^{-N} e^{U(t)}\Big).$$

Soit $N = [U(t)/\log 2]$, alors

$$\begin{aligned}
\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} &\lesssim 1 + \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \\
&\lesssim 1 + t + \int_0^t \|\omega(\tau)\|_{B^0_{\infty,1}} d\tau.
\end{aligned}$$

Par Gronwall

$$\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} + \|u(t)\|_{W^{1,\infty}} \le \Phi(t, u_0).$$