Stabilisation par feedback des équations de Navier-Stokes: l'approche "Riccati" et son approximation

Mehdi Badra

Université Paul Sabatier Toulouse 3, Laboratoire MIP

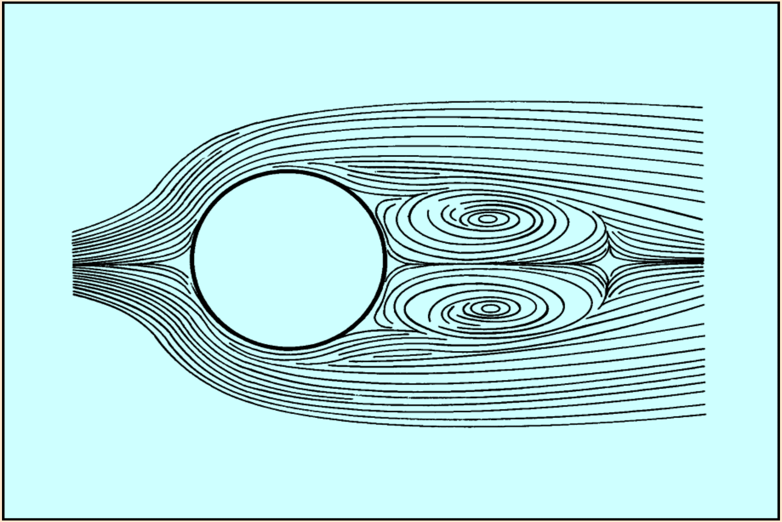
Lille, 22 Mars 2007

Plan

1. Stabilisation feedback d'un écoulement

2. Approximation d'un problème de contrôle optimal

Ecoulement autour d’un cylindre circulaire, Re = 26,

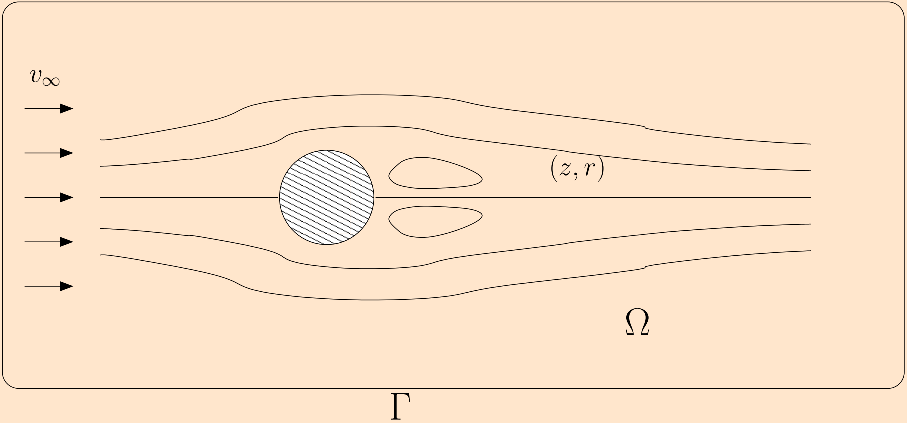


Stabilisation feedback d'un écoulement

Ecoulement autour d'un cylindre circulaire, Re = 200,

Stabilisation feedback d'un écoulement

Ecoulement stationnaire dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$,



Etat stationnaire (z_s, r_s) solution des équations de Navier-Stokes :

$$-\nu \Delta z_s + (z_s \cdot \nabla) z_s + \nabla r_s = f, \quad \nabla \cdot z_s = 0 \;\; dans \;\; \Omega, \quad z_s = v_\infty \;\; sur \;\; \Gamma$$

Système instable

- A l'instant $t = 0$:

$$z_s \quad \curvearrowright \quad z_s + y_0 \quad y_0 \neq 0$$

- Etat instationnaire résultant : vitesse $z(t)$ et pression $r(t)$

$$\begin{array}{l} \partial_t z - \nu \Delta z + (z \cdot \nabla) z + \nabla r = f, \quad \nabla \cdot z = 0 \ \ dans \ \ Q, \\ z = v_\infty \ \ sur \ \ \Sigma, \quad z = 0 \ \ sur \ \ \Sigma_0, \quad z(0) = z_s + y_0 \end{array}$$

$$Q = \Omega \times (0, \infty), \quad \Sigma = \Gamma \times (0, \infty), \quad \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, \infty).$$

- (z_s, r_s) équilibre instable :

$$z(t) \not\rightarrow z_s \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow +\infty.$$

- Stabilisation par feedback frontière :

$$\begin{array}{rcl} \text{Action} & : & z|_{\Gamma_0} = F(z, z_s) \\ \text{Objectif} & : & z(t) \longrightarrow z_s \end{array}$$

Système instable

- Changement de variable :

$$z(t) = z_s + y(t), \quad r = r_s + p(t)$$

- Système vérifié par (y, p) :

$$\begin{array}{l} \partial_t y - \nu \Delta y + (y \cdot \nabla) z_s + (z_s \cdot \nabla) y + (y \cdot \nabla) y + \nabla p = 0 \;\; dans \;\; Q, \\ \nabla \cdot y = 0 \;\; dans \;\; Q, \quad y = 0 \;\; sur \;\; \Sigma, \quad y = F(y) \;\; sur \;\; \Sigma_0 \quad y(0) = y_0 \end{array}$$

- Question : comment trouver F telle que :

$$y(t) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow +\infty$$

- Travailler sur le système linéarisé (système de Oseen) :

$$\begin{array}{l} \partial_t y - \nu \Delta y + (y \cdot \nabla) z_s + (z_s \cdot \nabla) y + \nabla p = 0 \;\; dans \;\; Q, \\ \nabla \cdot y = 0 \;\; dans \;\; Q, \quad y = 0 \;\; sur \;\; \Sigma, \quad y = F(y) \;\; sur \;\; \Sigma_0 \quad y(0) = y_0 \end{array}$$

Stabilisation d'un système dynamique

- Système instable :

$$y(t) \in \mathbb{R}^n, \quad y' = Ay, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$

- Système contrôlé :

$$u(t) \in \mathbb{R}^k, \quad y(t) \in \mathbb{R}^n, \quad y' = Ay + Bu, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$

- Choix du contrôle :

$$\mathcal{V}(y_0) = \inf \left\{ \mathcal{J}(y,u) \;\middle|\; y' = Ay + Bu, \;\; y(0) = y_0 \in V \right\}$$

$$\text{où} \quad \mathcal{J}(y,u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty |y(t)|^2_{\mathbb{R}^n} dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty |u(t)|^2_{\mathbb{R}^k} dt.$$

Contrôle et état optimal

- Condition d'existence d'un couple optimal $(\widehat{y}, \widehat{u})$:

$$(\tilde{y}, \tilde{u}) \quad \text{tel que} \quad \mathcal{J}(\tilde{y}, \tilde{u}) < +\infty.$$

- Contrôle et état optimal :

$$\widehat{u} = -B^* \Pi \widehat{y}, \quad \widehat{y}' = A\widehat{y} - BB^* \Pi \widehat{y}, \qquad \widehat{y}(0) = y_0 \in V$$

- Equation de Riccati :

$$\Pi = \Pi^* \geq 0, \quad \Pi A + A^* \Pi - \Pi BB^* \Pi + I = 0$$

- Stabilité du système optimal :

$$\|\widehat{y}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq Ce^{-\sigma t} \|y_0\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \sigma > 0.$$

Cas de la dimension infinie

Problème de contrôle optimal

$$\mathcal{V}(y_0) = \inf \left\{ \mathcal{J}(y,u) \;\middle|\; y' = Ay + Bu, \;\; y(0) = y_0 \right\}$$

$$\text{où} \quad \mathcal{J}(y,u) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \|y(t)\|_V^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \|u(t)\|_U^2 dt.$$

- U et V espaces de Hilbert, $(\mathcal{D}(A), A)$ opérateur non borné dans V.
- Condition de Coût fini : $(\tilde{y}, \tilde{u})$ tel que $\mathcal{J}(\tilde{y}, \tilde{u}) < +\infty$.

Système dynamique de dimension infinie : $B \in \mathcal{L}(U, V)$

Exemple : contrôlé distribué dans une partie $\omega \subset \Omega$,

$$\partial_t y = \Delta y + I_\omega u, \quad y|_\Gamma = 0, \quad y(0) = y_0 \in L^2$$

$$V = U = L^2, \quad A = \Delta, \quad \mathcal{D}(A) = H^2 \cap H_0^1, \quad B = I_\omega.$$

Cas de la dimension infinie

Système dynamique de dimension infinie : $B \in \mathcal{L}(U, [\mathcal{D}(A^*)]')$

- Méthode d'extrapolation :

$$\frac{d}{dt}(y|\varphi)_V = (y|A^*\varphi)_V + (u|B^*\varphi)_U, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A^*),$$

$$\text{i.e.} \quad y' = \widetilde{A}y + Bu \in [\mathcal{D}(A^*)]'.$$

- Exemple : Contôle frontière, $V = L^2$, $U = L^2(\Gamma)$,

$$\partial_t y = \Delta y, \quad y|_\Gamma = u, \quad y(0) = y_0 \in L^2,$$

$$\partial_t \int_\Omega y\varphi = \int_\Omega y\Delta\varphi - \int_\Gamma u\frac{\partial\varphi}{\partial n} \quad \forall \varphi \in H^2 \cap H_0^1$$

$$\text{i.e.} \quad y' = \widetilde{\Delta}y + \left(-\frac{\partial}{\partial n}\right)^* u \in [H^2 \cap H_0^1]'.$$

Système dynamique de Oseen/Stokes

Equations de Oseen

$$\partial_t y - \nu \Delta y + (y \cdot \nabla) z_s + (z_s \cdot \nabla) y + \nabla p = 0, \; \nabla \cdot y = 0 \;\text{ dans }\; Q,$$

$$y = u \;\text{ sur }\; \Sigma, \qquad \int_\Gamma u \cdot n = 0, \qquad y(0) = y_0$$

Décomposition du champ de vitesse : (J.-P. Raymond 2005)

$$V_n^0 = \left\{ y \in \mathbf{L}^2 \mid \nabla \cdot y = 0, \; y \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}, \qquad P : \mathbf{L}^2 \to V_n^0$$

$$y(t) = w(t) + \nabla q(t), \quad w(t) \in V_n^0 \qquad \big(w = Py\big)$$

Système dynamique de Oseen/Stokes

Equations de Stokes ($z_s = 0$, $\nu = 1$)

$$\partial_t y - \Delta y + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot y = 0 \quad \text{dans} \;\; Q,$$
$$y = u \;\; \text{sur} \;\; \Sigma, \quad \int_\Gamma u \cdot n = 0, \quad y(0) = y_0$$

Décomposition du champ de vitesse : (J.-P. Raymond 2005)

$$V_n^0 = \left\{ y \in \mathbf{L}^2 \mid \nabla \cdot y = 0, \; y \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}, \quad P : \mathbf{L}^2 \to V_n^0$$

$$y(t) = w(t) + \nabla q(t), \quad w(t) \in V_n^0 \qquad \big(w = Py\big)$$

Système dynamique de Oseen/Stokes

Système dynamique régissant $t \mapsto w(t) \in V_n^0$

- Formulation par transposition : $\forall \varphi \in \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1 \cap V_n^0$,

$$
\begin{aligned}
\nabla \psi &= (I - P)\Delta\varphi \in H^1 \\
\partial_t \int_\Omega w(t) \cdot \varphi &= \int_\Omega w(t) \cdot \Delta\varphi - \int_\Gamma u(t) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \psi n \right),
\end{aligned}
$$

$$\text{i.e.} \quad w' = Aw + Bu \in [\mathcal{D}(A^*)]', \quad w(0) = Py_0 \in V_n^0$$

Expression du gradient de pression

- Relèvement $D : \mathbf{L}^2(\Gamma) \longrightarrow \mathbf{L}^2$:

$$-\Delta Du + \nabla\chi = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot Du = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad Du|_\Gamma = u$$

- Equation pseudo-stationnaire : $\nabla q(t) = (I - P)Du(t)$

Problème de minimisation

Problème de contrôle optimal

$$\mathcal{V}(y_0) = \min \left\{ \mathcal{J}(w,u) \,\middle|\, w' = Aw + Bu \in [\mathcal{D}(A^*)]',\ w(0) = w_0 \right\}$$

$$\widehat{u} = -B^*\Pi\widehat{w}, \quad \widehat{w}' = A\widehat{w} - BB^*\Pi\widehat{w}, \quad \widehat{w}(0) = Py_0 \in V_n^0$$

Equation de Riccati

$$\forall(\xi,\zeta) \in [\mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1 \cap V_n^0] \times [\mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1 \cap V_n^0]$$

$$\int_\Omega (\Delta\xi \cdot \Pi\zeta + \Pi\xi \cdot \Delta\zeta + \xi \cdot \zeta) = \int_\Gamma \frac{\partial \Pi\xi}{\partial n} \cdot \frac{\partial \Pi\zeta}{\partial n} + \int_\Gamma \phi_\xi \phi_\zeta$$

où $\nabla\phi_\xi = (I-P)\Delta\xi,\ \nabla\phi_\zeta = (I-P)\Delta\zeta, \quad \int_\Gamma \phi_\xi = \int_\Gamma \phi_\zeta = 0$

Système d'E.D.P en boucle fermée

Système de Stokes en boucle fermée

$$
\begin{aligned}
\partial_t y &= \Delta y - \nabla p, \quad \nabla \cdot y = 0 \ \text{ dans } \ Q, \\
\gamma_\tau(y) &= \frac{\partial \Pi P y}{\partial n}, \quad \gamma_n(y) = qn \ \text{ sur } \Sigma, \ y(0) = y_0,
\end{aligned}
$$

$$
\text{où} \quad \begin{cases} \Delta q = 0 \ \text{ dans } \ Q, & \displaystyle\int_\Gamma q = 0 \\ \dfrac{\partial q}{\partial n} = -\Delta \Pi P y \cdot n \ \text{ sur } \ \Sigma \end{cases}
$$

Stabilité exponentielle du système de N-S 2D en boucle fermée

Point fixe ([Raymond 2006]), fonction de Lyapunov ([Badra 2006])

Système d'E.D.P en boucle fermée

Système de Oseen en boucle fermée

$$\begin{aligned}\partial_t y &= \nu\Delta y - (y\cdot\nabla)z_s - (z_s\cdot\nabla)y - \nabla p, \quad \nabla\cdot y = 0 \ \text{dans} \ Q,\\ \gamma_\tau(y) &= \frac{\partial \Pi P y}{\partial n}, \quad \gamma_n(y) = qn \ \text{sur}\ \Sigma, \quad y(0) = y_0,\end{aligned}$$

$$\text{où} \quad \left\{\begin{array}{l}\Delta q = \nabla\cdot((\nabla z_s)^T - z_s\cdot\nabla)\Pi P y \ \text{dans} \ Q, \quad \int_\Gamma q = 0\\ \dfrac{\partial q}{\partial n} = (-\nu\Delta + (\nabla z_s)^T - z_s\cdot\nabla)\Pi P y\cdot n \ \text{sur} \ \Sigma\end{array}\right.$$

Stabilisation : $\sigma_\Pi > 0$ et $\|y(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq Ce^{-\sigma_\Pi t}\|y_0\|_{\mathbf{L}^2} \quad t \geq 0$

Stabilité exponentielle du système de N-S 2D en boucle fermée

Point fixe ([Raymond 2006]), fonction de Lyapunov ([Badra 2006])

Système d'E.D.P en boucle fermée

Système de Navier-Stokes 2D en boucle fermée

$$
\begin{aligned}
\partial_t y &= \nu\Delta y - (y\cdot\nabla)z_s - (z_s\cdot\nabla)y - (y\cdot\nabla)y - \nabla p \ \text{ dans } \ Q,\\
\gamma_\tau(y) &= \frac{\partial \Pi P y}{\partial n}, \quad \gamma_n(y) = qn \ \text{ sur } \Sigma, \ \nabla\cdot y = 0 \ \text{ dans } \ Q, \ y(0) = y_0,
\end{aligned}
$$

$$
\text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l}
\Delta q = \nabla\cdot((\nabla z_s)^T - z_s\cdot\nabla)\Pi P y \ \text{ dans } \ Q, \qquad \displaystyle\int_\Gamma q = 0\\
\dfrac{\partial q}{\partial n} = (-\nu\Delta + (\nabla z_s)^T - z_s\cdot\nabla)\Pi P y\cdot n \ \text{ sur } \ \Sigma
\end{array}\right.
$$

Stabilisation : $\sigma_\Pi > 0$ et $\|y(t)\|_{\mathbf{L}^2} \le C e^{-\sigma_\Pi t}\|y_0\|_{\mathbf{L}^2} \quad t \ge 0$

Stabilité exponentielle du système de N-S 2D en boucle fermée

Point fixe ([Raymond 2006]), fonction de Lyapunov ([Badra 2006])

- Loi de feedback frontière dynamique ([Badra 2006]) :

$$\partial_t u - \Delta_b u + \Pi_3 u - \sigma\, n = \Pi_2 P y, \quad u_0 = y_0|_\Gamma$$

- Equation de Riccati différentielle ([Raymond 2006]) :

$$\frac{d\Pi}{dt}(t) = A^* \Pi(t) + \Pi(t) A - \Pi(t) B B^* \Pi(t) + A_0^{-1} \quad t \in [0, t_0]$$

- Contrôle feedback tangentiel ([Barbu, Lasieka, Triggiani, 2006]).
- Feedback distribuée ([Barbu, 2003], [Barbu,Triggiani, 2004], [Badra 2006]).

Plan

Approximation du triplet $(\widehat{y}, \widehat{u}, \Pi)$

$$(\mathcal{P}_{y_0}) \quad \inf \left\{ \mathcal{J}(y,u) \mid y' = Ay + Bu \in [\mathcal{D}(A^*)]',\ y(0) = y_0 \in V \right\}$$

$$\text{où} \quad \mathcal{J}(y,u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \|y(t)\|_V^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty \|u(t)\|_U^2 dt.$$

- Paire $(\widehat{y}, \widehat{u})$ solution de $(\mathcal{P}_{y_0})$:

$$\widehat{y}' = A\widehat{y} - BB^*\Pi\widehat{y}, \quad \widehat{y}(0) = y_0, \quad \widehat{u} = B^*\Pi\widehat{y}$$

$$\widehat{y}(t) = e^{A_\Pi t} y_0 \quad \text{où} \quad A_\Pi = A - BB^*\Pi$$

- $\Pi \in \mathcal{L}(V)$ tel que $\Pi = \Pi^* \geq 0$ et $\Pi A + A^*\Pi - \Pi BB^*\Pi + I = 0$.
- Stabilité exponentielle : $\|e^{A_\Pi t}\|_{\mathcal{L}(V)} \leq Ce^{\omega_\Pi t}$ où $\omega_\Pi < 0$

Problème de contrôle optimal approché

Problème de minimisation : $0 < h < h_0$

$$(\mathcal{P}_{h,y_0}) \quad \inf\left\{ \mathcal{J}(y_h, u) \;\middle|\; y_h' = A_h y_h + B_h u,\ y_h(0) = P_h y_0 \in V_h \right\}$$

Approximation non conforme

$$y(t) \in V, \quad y_h(t) \in V_h \quad \text{et} \quad V_h \not\subseteq V$$

$$V \subset X, \quad V_h \subset X \quad \text{et} \quad P : X \longrightarrow V, \quad P_h : X \longrightarrow V_h$$

$$(\mathcal{H}_1) \quad \|P - P_h\|_{\mathcal{L}(Z,X)} \leq C h^{m(1-\bar{\gamma})} \quad \forall h > 0, \quad Z \hookrightarrow X.$$

- Non conforme : Stokes, Oseen :

$$X = \mathbf{L}^2,\ V = V_n^0, \quad P : \mathbf{L}^2 \longrightarrow V_n^0 \quad \text{projecteur de Leray}$$

- Conforme : $V_h \subset V = X$ ([Lasiecka, Triggiani 1991], [L. 1992]).

Hypothèses d'approximations (Eléments Finis)

Hypothèse ($\mathcal{H}_2$)

- $(e^{At})_{t>0}$ analytique dans $V \subset X$
- $(e^{A_h t})_{t>0}$ uniformément (p/r h) analytique dans $V_h \subset X$
- Estimation $A_h \to A$:

$$\|A^{-1}P - A_h^{-1}P_h\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ch^m, \quad m > 0$$

- $A^{-\gamma}B \in \mathcal{L}(U, V)$, $\gamma \geq 0$.
- Inégalité inverse :

$$\|B_h\|_{\mathcal{L}(U,V_h)} \leq Ch^{-m\bar{\gamma}}, \quad 0 \leq \bar{\gamma} \leq \gamma < 0.$$

- Estimation $B_h \to B$:

$$\|A^{-1}(PB_h - B)\|_{\mathcal{L}(U,V)} \leq Ch^{m(1-\bar{\gamma})}.$$

Existence de solution du problème approché $(\mathcal{P}_{h,y_0})$

Condition de coût fini

$$\text{Trouver} \quad (\widetilde{y}_h, \widetilde{u}_h) \quad \text{tel que} \quad \widetilde{y}_h' = A_h \widetilde{y}_h + B_h \widetilde{u}_h$$

$$\text{et} \quad \mathcal{J}(y,u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \|\widetilde{y}_h(t)\|_V^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty \|\widetilde{u}_h(t)\|_U^2 < +\infty$$

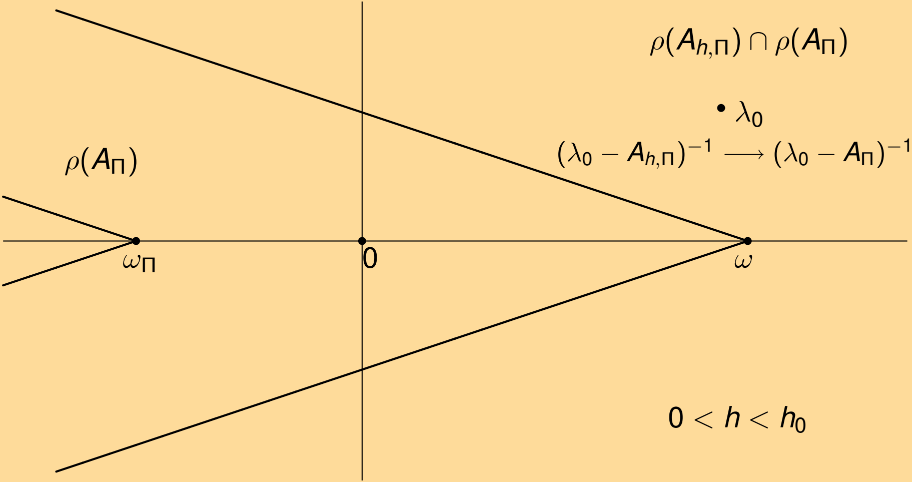
- Candidat 'naturel' : $\widetilde{u}_h = \big(B^*\Pi\big) P \widetilde{y}_h$ et $\widetilde{y}_h$ solution de

$$\widetilde{y}_h' = A_h \widetilde{y}_h - B_h \big(B^*\Pi\big) P \widetilde{y}_h, \qquad \widetilde{y}_h(0) = P_h y_0$$

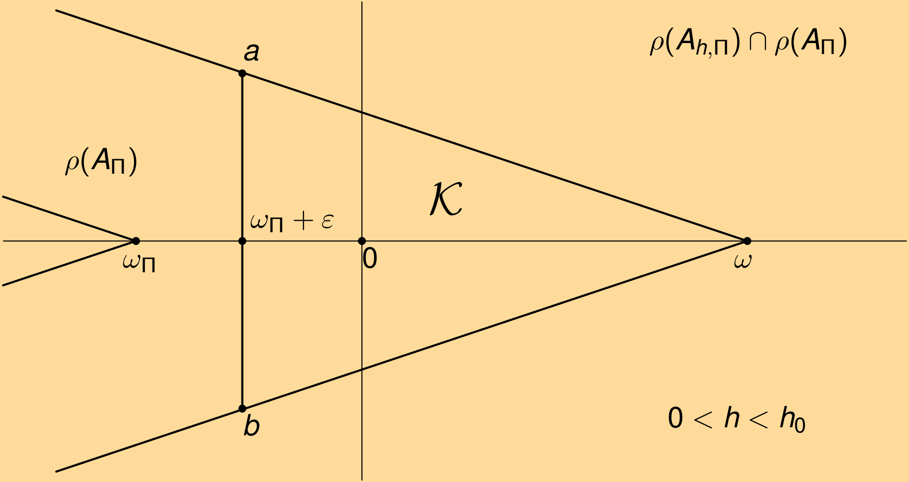
- $\widetilde{y}_h \in L^2(X) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{C}^+ \subset \rho(A_{h,\Pi})$ où $A_{h,\Pi} = A_h - B_h\big(B^*\Pi\big)P$

Existence de solution du problème approché $(\mathcal{P}_{h,y_0})$

Spectre de $A_\Pi = A - B\big(B^*\Pi\big)$ et $A_{h,\Pi} = A_h - B_h\big(B^*\Pi\big)P$

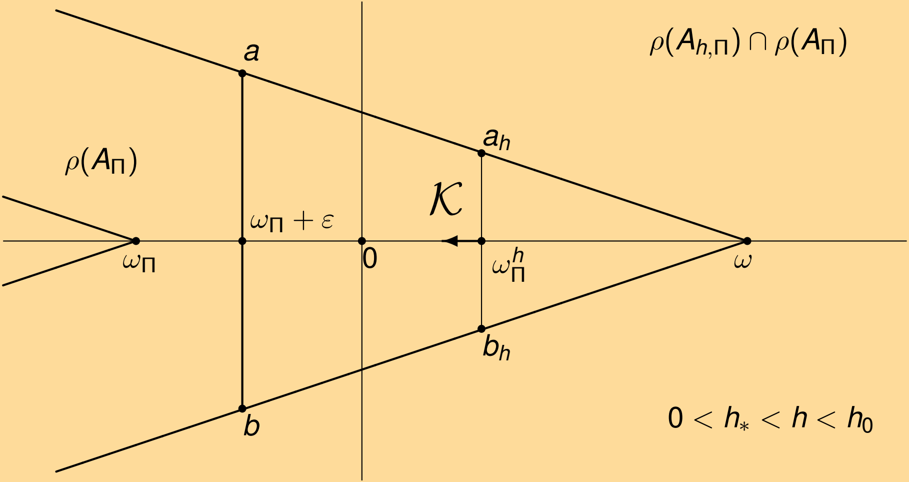


Spectre de $A_\Pi = A - B\big(B^*\Pi\big)$ et $A_{h,\Pi} = A_h - B_h\big(B^*\Pi\big)P$



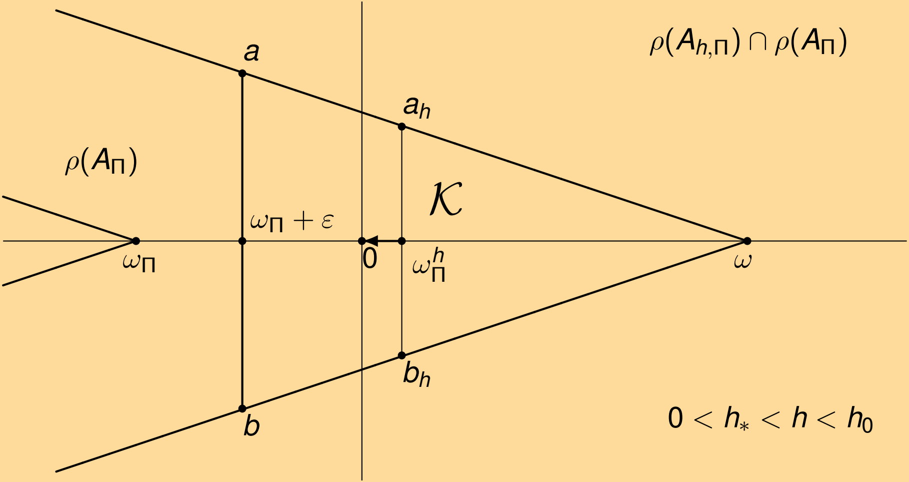
Existence de solution du problème approché $(\mathcal{P}_{h,y_0})$

Spectre de $A_\Pi = A - B(B^*\Pi)$ et $A_{h,\Pi} = A_h - B_h(B^*\Pi)P$



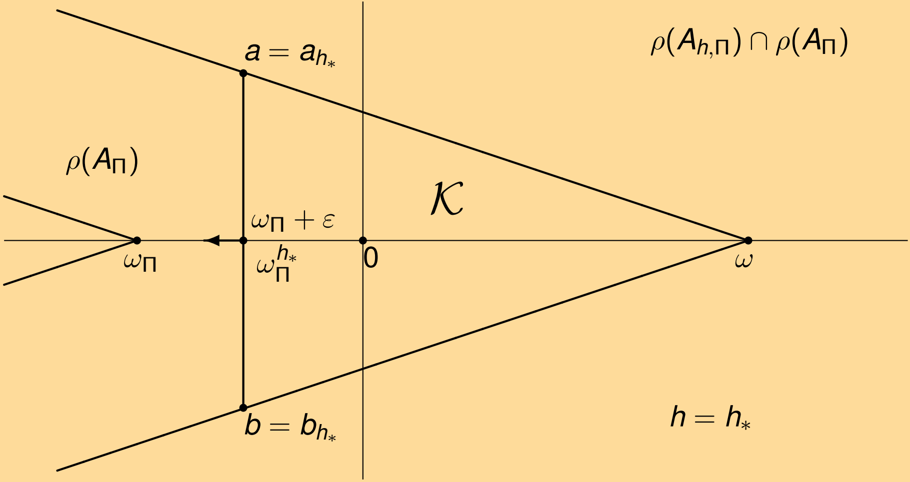
Existence de solution du problème approché $(\mathcal{P}_{h,y_0})$

Spectre de $A_\Pi = A - B\big(B^*\Pi\big)$ et $A_{h,\Pi} = A_h - B_h\big(B^*\Pi\big)P$



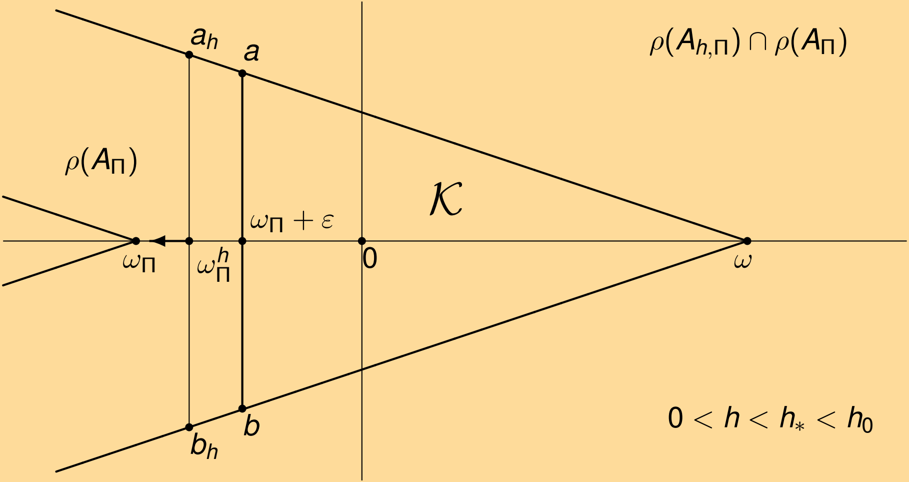
Existence de solution du problème approché $(\mathcal{P}_{h,y_0})$

Spectre de $A_\Pi = A - B(B^*\Pi)$ et $A_{h,\Pi} = A_h - B_h(B^*\Pi)P$



Existence de solution du problème approché $(\mathcal{P}_{h,y_0})$

Spectre de $A_\Pi = A - B\big(B^*\Pi\big)$ et $A_{h,\Pi} = A_h - B_h\big(B^*\Pi\big)P$



Existence de solution du problème approché $(\mathcal{P}_{h,y_0})$

Convergence généralisée : $\delta(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}) \longrightarrow 0$

$$\mathcal{A}_h : V_h \longrightarrow V_h \quad \text{et} \quad \mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset V \longrightarrow V$$

$$\delta(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}) = \sup_{\|(v_h, \mathcal{A}_h v_h)\|=1} \inf_{(v, \mathcal{A}v)} \left\{ \|v_h - v\|_X + \|\mathcal{A}_h v_h - \mathcal{A}v\|_X \right\}$$

THÉORÈME

$$\delta(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}) \longrightarrow 0 \quad \textit{et} \quad \mathcal{K} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad \textit{compacte}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists h_* > 0, \quad \forall h \in]0, h_*[, \quad \mathcal{K} \subset \rho(\mathcal{A}_h)$$

Solution du problème approché $(\mathcal{P}_{h,y_0})$

Existence d'un triplet $(\widehat{y}_h, \widehat{u}_h, \Pi_h)$ pour $0 < h < h_*$

- Il existe $(\widehat{y}_h, \widehat{u}_h)$ tel que :

$$\mathcal{J}(\widehat{y}_h, \widehat{u}_h) = \inf \left\{ \mathcal{J}(y_h, u) \mid y_h' = A_h y_h + B_h u,\ y_h(0) = P_h y_0 \in V_h \right\}$$

- $(\widehat{y}_h, \widehat{u}_h)$ solution de

$$\widehat{y}_h' = A_h \widehat{y}_h - B_h B_h^* \Pi_h \widehat{y}_h, \quad \widehat{y}_h(0) = P_h y_0 \quad \text{et} \quad \widehat{u}_h = B_h^* \Pi_h \widehat{y}_h$$

$$\widehat{y}_h(t) = e^{A_{h,\Pi_h} t} P_h y_0 \quad \text{où} \quad A_{h,\Pi_h} = A_h - B_h B_h^* \Pi_h \in \mathcal{L}(V_h)$$

- $\Pi_h \in \mathcal{L}(V_h)$ est l'unique solution de :

$$\Pi_h = \Pi_h^* \geq 0, \quad \Pi_h A_h + A_h^* \Pi_h - \Pi_h B_h B_h^* \Pi_h + I_h = 0$$

Estimations d'erreur

Estimation d'erreur pour $\Pi_h \longrightarrow \Pi$

$$\mathcal{J}(\widehat{y},\widehat{u}) - \mathcal{J}(\widetilde{y}_h,\widetilde{u}_h) \leq \underbrace{\mathcal{J}(\widehat{y},\widehat{u}) - \mathcal{J}(\widehat{y}_h,\widehat{u}_h)}_{\frac{1}{2}((\Pi P - \Pi_h P_h) y_0 | y_0)} \leq \mathcal{J}(\widetilde{y},\widetilde{u}) - \mathcal{J}(\widehat{y}_h,\widehat{u}_h)$$

$$\Longrightarrow \|\Pi_h P_h - \Pi P\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C h^{m(1-\bar{\gamma})}$$

Estimation d'erreur pour l'état optimal

- Etats optimaux : $\widehat{y}_h(t) = e^{(A_h - B_h B_h^* \Pi_h)t} P_h y_0$ et $\widehat{y}(t) = e^{(A - BB^*\Pi)t} y_0$.

$$\Pi_h \longrightarrow \Pi \quad \text{pas suffisant pour} \quad \widehat{y}_h(t) \longrightarrow \widehat{y}(t).$$

- $B_h^* \Pi_h \longrightarrow B^* \Pi \Longrightarrow \widehat{y}_h(t) \longrightarrow \widehat{y}(t)$

$$\Pi_h \longrightarrow \Pi \quad \text{pas suffisant pour} \quad B_h^* \Pi_h \longrightarrow B^* \Pi.$$

Estimation d'erreur pour l'état optimal

- Système d'optimalité : $\widehat{u} = -B^*\widehat{\Phi}$, $(\widehat{y}, \widehat{\Phi})$ solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} y' & = Ay - BB^*\Phi, \quad y(0) = y_0 \\ -\Phi' & = A^*\Phi + y, \quad \Phi(\infty) = 0 \\ \Phi(t) & = \Pi y(t) \quad \forall t \in [0, \infty[\end{array}\right.$$

- Formule de Duhamel :

$$\mathcal{M}(u) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

$$\widehat{y}(t) = e^{At} y_0 - \mathcal{M}\mathcal{M}^*(\widehat{y})(t)$$

- Equations intégrales en temps :

$$\begin{array}{rcl} (I + \mathcal{M}\mathcal{M}^*)(\widehat{y}) & = & e^{A(\cdot)} y_0 \\ (I + \mathcal{M}_h\mathcal{M}_h^*)(\widehat{y}_h) & = & e^{A_h(\cdot)} P_h y_0 \end{array}$$

Estimation d'erreur pour l'état optimal

- Système d'optimalité : $\widehat{u} = -B^*\widehat{\Phi}$, $(e^{-\omega(\cdot)}\widehat{y}, e^{-\omega(\cdot)}\widehat{\Phi})$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} y' & = Ay - \omega y - BB^*\Phi, \quad y(0) = y_0 \\ -\Phi' & = A^*\Phi - \omega\Phi + y + 2\omega\Pi y, \quad \Phi(\infty) = 0 \\ \Phi(t) & = \Pi y(t) \quad \forall t \in [0, \infty[\end{array} \right.$$

- Formule de Duhamel :

$$\mathcal{M}(u) = \int_0^t e^{(A-\omega)(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

$$e^{-\omega t}\widehat{y}(t) = e^{(A-\omega)t} y_0 - \mathcal{M}\mathcal{M}^*\left(I + 2\omega\Pi\right)\left(e^{-\omega t}\widehat{y}\right)(t)$$

- Equations intégrales en temps :

$$\begin{array}{rcl} (I + \mathcal{M}\mathcal{M}^*(I + 2\omega\Pi))(e^{-\omega(\cdot)}\widehat{y}) & = & e^{(A-\omega)(\cdot)} y_0 \\ (I + \mathcal{M}_h\mathcal{M}_h^*(I + 2\omega\Pi_h))(e^{-\omega(\cdot)}\widehat{y}_h) & = & e^{(A_h-\omega)(\cdot)} P_h y_0 \end{array}$$

Estimation d'erreur pour l'état optimal

Estimation d'erreur

- Equations intégrale :

$$\|\mathcal{M}_h - \mathcal{M}\|_{\mathcal{L}(L^p(U),L^p(X))} + \|\Pi_h P_h - \Pi P\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C h^{m(1-\bar{\gamma})}$$

$$\Downarrow$$

$$\|e^{-\omega(\cdot)}(\widehat{y}_h - \widehat{y})\|_{L^p(X)} \leq C h^{\frac{m}{p}} |\ln h|^{1/p} + h^{m(1-\bar{\gamma})} \ell_{h,1/\bar{\gamma}}, \quad p \in]1, \infty[$$

- Obtention d'une estimation d'erreur ponctuelle en temps :

$$(\omega - A_{h,\Pi_h})^{-1} P_h y_0 - (\omega - A_\Pi)^{-1} y_0 = \int_0^\infty e^{-\omega\tau}(\widehat{y}_h(\tau) - \widehat{y}(\tau)) d\tau$$

$$\widehat{y}_h(t) - \widehat{y}(t) = \frac{1}{2i\Pi} \int_{\mathcal{C}} e^{\lambda t}((\lambda - A_{h,\Pi_h})^{-1} P_h y_0 - (\lambda - A_\Pi)^{-1} y_0) d\lambda$$

- Estimation d'erreur pour $\widehat{u} - \widehat{u}_h$: méthode analogue.

Résultat

THÉORÈME

Soit $\widehat{\omega} > 0$ *tel que* $\|\widehat{y}(t)\|_V \leq e^{-\widehat{\omega} t}$ *et soit* $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ *vraies.*
Alors, il existe $h_* > 0$ *tel que pour tout* $0 < h < h_*$ *:*

$$\|\Pi_h P_h - \Pi P\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C h^{m(1-\bar{\gamma})} \ell_h \quad \text{et} \quad |\widehat{\omega}_h - \widehat{\omega}| \leq C h^{m(1-\bar{\gamma})} \ell_h$$

$$\|\widehat{u}_h(t) - \widehat{u}(t)\|_X + t^{1-\bar{\gamma}} \|\widehat{y}_h(t) - \widehat{y}(t)\|_X \leq C e^{-\widehat{\omega}_h t} h^{m(1-\bar{\gamma})} \ell_h \|y_0\|_X$$

Application : Oseen (éléments finis P2-P1)

	Distribué	Frontière (C. Dir.)
$\|\Pi_h P_h - \Pi P\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}^2)}$	$h^2 \ell_h$	$h^{\frac{1}{2}}$
$\lvert\widehat{\omega}_h - \widehat{\omega}\rvert$	$h^2 \ell_h$	$h^{\frac{1}{2}} \ell_h$
$\|\widehat{y}_h(t) - \widehat{y}(t)\|_{\mathbf{L}^2}$	$\frac{e^{-\widehat{\omega}_h t}}{t} h^2 \ell_h \|y_0\|_{V_n^0}$	$\frac{e^{-\widehat{\omega}_h t}}{t^{\frac{1}{4}}} h^{\frac{1}{2}} \ell_h \|y_0\|_{V_n^0}$
$\|\widehat{u}_h(t) - \widehat{u}(t)\|_{\mathbf{L}^2}$	$e^{-\widehat{\omega}_h t} h^2 \ell_h \|y_0\|_{V_n^0}$	$e^{-\widehat{\omega}_h t} h^{\frac{1}{2}} \ell_h \|y_0\|_{V_n^0}$

Conclusions et Perspectives

Conclusions

- Estimations d'erreur pour la semi-discrétisation en espace d'un problème de contrôle optimal.
- Difficultés : formulation adaptée (contrôle non régulier), estimations d'erreur intermédiaires, existence d'une solution approchée (cas non conforme).
- Résultats satisfaisants.

Perspectives

- Approximation et estimation d'erreur pour le non linéaire.
- Discrétisation temporelle : schéma numérique.
- Aspect calcul :
  - Résolution des équations de Riccati, calcul des lois de feedback.
  - Validation des lois obtenues : simulations numériques.
- Estimation de l'état.