

Écoulement diphasique en milieu poreux hétérogène

Clément Cancès

LATP, Université de Marseille

22 mars 2007

- 1 Le problème physique
- 2 Existence d'une solution faible
- 3 Continuité temporelle d'une solution
- 4 Un résultat d'unicité
- 5 Essai numérique
- 6 Conclusion

- 1 Le problème physique
- 2 Existence d'une solution faible
- 3 Continuité temporelle d'une solution
- 4 Un résultat d'unicité
- 5 Conclusion
- 6 Essai numérique

Le milieu poreux hétérogène Ω est juxtaposition de milieux poreux homogènes Ω_i , avec :

- Ω est un ouvert polygonal de \mathbb{R}^d ,
- $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i$ avec Ω_i polygonal,
- $\bar{\Gamma}_{(i,j)} = \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j$, $\Gamma_{(i,j)} \subset \Omega$.

Les caractéristiques physiques du milieu poreux ne dépendent que de i .

Un exemple de domaine Ω

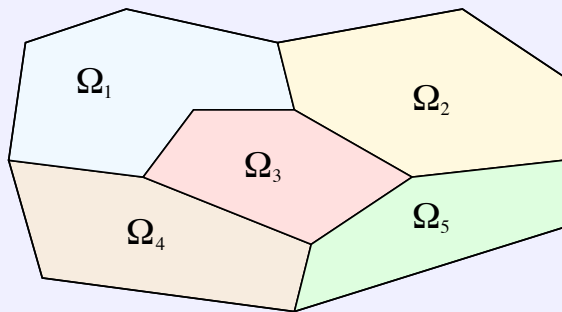


FIG.: Un exemple de domaine Ω

Le problème physique

- Milieu Poreux : roche, avec de l'espace disponible pour un écoulement (exemple : sable, craie...).

$$\text{porosité : } \phi(x) = \phi_i = \frac{V_{\text{liquide}}}{V_{\text{total}}} > 0.$$

- Fluide diphasique : mélange eau/hydrocarbures immiscible.

$$\text{saturation en hydrocarbure : } u(x, t) = \frac{V_{\text{hydro}}}{V_{\text{liquide}}} \in [0, 1].$$

$$\text{saturation en eau : } 1 - u(x, t) = \frac{V_{\text{eau}}}{V_{\text{liquide}}} \in [0, 1].$$

Le problème physique

- p_o (resp. p_w) : pression partielle de la phase hydrocarbure (resp. aqueuse),
- $\eta_{o,i}$ (resp. $\eta_{w,i}$) : mobilité de la phase hydrocarbure (resp. aqueuse) dans Ω_i : capacité de l'huile (resp. de l'eau) à circuler.

Conservation des deux phases + relation entre les pressions partielles dans Ω_i :

$$\begin{cases} \phi \partial_t u - \operatorname{div}(\eta_{o,i}(u)(\nabla p_o - \rho_o \mathbf{g})) = 0, \\ -\phi \partial_t u - \operatorname{div}(\eta_{w,i}(u)(\nabla p_w - \rho_w \mathbf{g})) = 0, \\ p_o - p_w = \pi_i(u). \end{cases}$$

ou π_i est la pression capillaire.

Le problème physique

- p_o (resp. p_w) : pression partielle de la phase hydrocarbure (resp. aqueuse),
- $\eta_{o,i}$ (resp. $\eta_{w,i}$) : mobilité de la phase hydrocarbure (resp. aqueuse) dans Ω_i : capacité de l'huile (resp. de l'eau) à circuler.

Conservation des deux phases + relation entre les pressions partielles dans Ω_j :

$$\begin{cases} \phi \partial_t \mathbf{u} - \operatorname{div}(\eta_{o,i}(\mathbf{u})(\nabla p_o - \rho_o \mathbf{g})) = 0, \\ -\phi \partial_t \mathbf{u} - \operatorname{div}(\eta_{w,i}(\mathbf{u})(\nabla p_w - \rho_w \mathbf{g})) = 0, \\ p_o - p_w = \pi_j(\mathbf{u}). \end{cases}$$

ou π_j est la pression capillaire.

Le problème physique

On introduit la pression globale :

$$\bar{p} = p_w + \int_0^s \frac{\eta_{o,i}(a)}{\eta_{o,i}(a) + \eta_{w,i}(a)} \pi'_i(a) da$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \phi \partial_t \mathbf{u} - \operatorname{div}(\eta_{o,i}(\mathbf{u})(\nabla \bar{p} - \rho_o \mathbf{g}) - \lambda_i(\mathbf{u}) \nabla \pi_i(\mathbf{u})) = 0, \\ -\operatorname{div} \left(\sum_{\beta=o,w} \eta_{\beta,i}(\mathbf{u})(\nabla \bar{p} - \rho_\beta \mathbf{g}) \right) = 0 \end{cases}$$

avec : $\lambda_i(\mathbf{s}) = \frac{\eta_{o,i}(\mathbf{s})\eta_{w,i}(\mathbf{s})}{\eta_{o,i}(\mathbf{s}) + \eta_{w,i}(\mathbf{s})}$.

En négligeant les termes convectifs :

$$\phi_i \partial_t \mathbf{u}_i - \operatorname{div}(\lambda_i(\mathbf{u}_i) \nabla \pi_i(\mathbf{u}_i)) = 0.$$

Conditions de transmission sur $\Gamma_{(i,j)}$:

$$\begin{cases} \lambda_i(\mathbf{u}_i) \nabla \pi_i(\mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_i + \lambda_j(\mathbf{u}_j) \nabla \pi_j(\mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n}_j = 0 \\ \pi_i(\mathbf{u}_i) = \pi_j(\mathbf{u}_j) \end{cases}$$

+ condition limite sur $\partial\Omega$

+ condition initiale u_0 avec $0 \leq u_0 \leq 1$.

Hypothèses

- 1 pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, la fonction π_i vérifie :
 - $\pi_i \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ strictement croissante
 - $\forall (i, j), \quad \pi_i(0) = \pi_j(0)$
 - $\forall (i, j), \quad \pi_i(1) = \pi_j(1)$.
- 2 Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, la fonction $\lambda_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue et vérifie :
 - $\lambda_i(0) = \lambda_i(1) = 0$
 - $\forall s \in]0, 1[, \quad \lambda_i(s) > 0$.
- 3 $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ avec $0 \leq u_0 \leq 1$.

On définit :

$$\varphi_i : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{s} \mapsto \int_0^{\mathbf{s}} \lambda_i(\mathbf{a}) \pi_i'(\mathbf{a}) d\mathbf{a}. \end{cases}$$

$$\Pi_i : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{s} \mapsto \int_{\pi_i(0)}^{\pi_i(\mathbf{s})} \min_{j \in \{1, \dots, N\}} (\lambda_j \circ \pi_j^{(-1)}) d\mathbf{a}. \end{cases}$$

- $\Pi_i(\mathbf{s}) = f(\pi_i(\mathbf{s}))$, f strictement croissante,
- $\Pi_i \circ \varphi_i^{(-1)}$ lipschitzienne.

$$\begin{cases} \partial_t u_j - \Delta \varphi_j(u_j) = 0 & \text{dans } \Omega_j \times (0, T), \\ \Pi_i(u_i) = \Pi_j(u_j) & \text{sur } \Gamma_{(i,j)} \times (0, T), \\ \nabla \varphi_i(u_i) \cdot \mathbf{n}_i + \nabla \varphi_j(u_j) \cdot \mathbf{n}_j = 0 & \text{sur } \Gamma_{(i,j)} \times (0, T), \\ \nabla \varphi_i(u) \cdot \mathbf{n}(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

On définit :

$$\varphi_i : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{s} \mapsto \int_0^{\mathbf{s}} \lambda_i(\mathbf{a}) \pi_i'(\mathbf{a}) d\mathbf{a}. \end{cases}$$

$$\Pi_i : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{s} \mapsto \int_{\pi_i(0)}^{\pi_i(\mathbf{s})} \min_{j \in \{1, \dots, N\}} (\lambda_j \circ \pi_j^{(-1)}) d\mathbf{a}. \end{cases}$$

- $\Pi_i(\mathbf{s}) = f(\pi_i(\mathbf{s}))$, f strictement croissante,
- $\Pi_i \circ \varphi_i^{(-1)}$ lipschitzienne.

$$\begin{cases} \partial_t u_i - \Delta \varphi_i(u_i) = 0 & \text{dans } \Omega_i \times (0, T), \\ \Pi_i(u_i) = \Pi_j(u_j) & \text{sur } \Gamma_{(i,j)} \times (0, T), \\ \nabla \varphi_i(u_i) \cdot \mathbf{n}_i + \nabla \varphi_i(u_j) \cdot \mathbf{n}_j = 0 & \text{sur } \Gamma_{(i,j)} \times (0, T), \\ \nabla \varphi_i(u) \cdot \mathbf{n}(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Définition

Une fonction u est solution faible du problème si :

- 1 $u \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$, $0 \leq u \leq 1$ a.e. in $\Omega \times (0, T)$,
- 2 $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $\varphi_i(u) \in L^2(0, T; H^1(\Omega_i))$,
- 3 $\Pi(u, \cdot) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$,
- 4 pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega \times [0, T))$,

$$\int_{\Omega} \int_0^T u(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt + \int_{\Omega} u_0(x) \psi(x, 0) dx - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \int_0^T \nabla \varphi_i(u(x, t)) \cdot \nabla \psi(x, t) dx dt = 0.$$

- 1 Le problème physique
- 2 Existence d'une solution faible
- 3 Continuité temporelle d'une solution
- 4 Un résultat d'unicité
- 5 Essai numérique
- 6 Conclusion

Maillage admissible Volumes finis

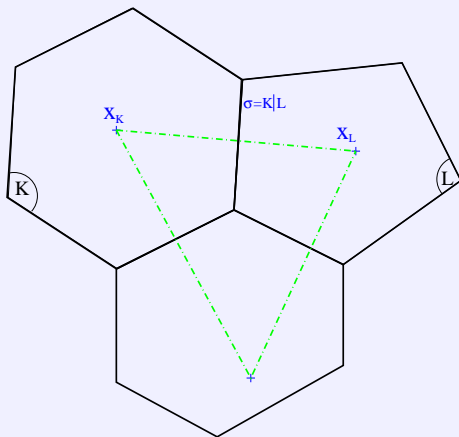


FIG.: Maillage admissible

Définition

Un maillage admissible de Ω est donné par un triplet $(\mathcal{T}, \mathcal{E}, (x_K)_{K \in \mathcal{T}})$:

- 1 \mathcal{T} est une famille de sous-ensembles de Ω tels que :
 - $\forall K \in \mathcal{T}, m(K) > 0,$
 - $\bigcup_{K \in \mathcal{T}} \bar{K} = \bar{\Omega},$
 - $K \subset \Omega_i$ pour un $i.$
- 2 \mathcal{E} est une famille de sous-ensembles de $\bar{\Omega}$ contenus dans des hyperplans de \mathbb{R}^d , avec :
 - $\forall K \in \mathcal{T}, \exists \mathcal{E}_K \subset \mathcal{E}, \partial K = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \bar{\sigma},$
 - $\forall (K, L) \in \mathcal{T}^2, K \neq L, m_{(d-1)}(\bar{K} \cap \bar{L}) \neq 0 \Rightarrow \bar{K} \cap \bar{L} = \bar{\sigma}.$
dans ce cas, on peut écrire $\sigma = K|L.$
- 3 $(x_K)_{K \in \mathcal{T}}$ est une famille de points de Ω avec :
 - $x_K \in K,$
 - $(x_K, x_L) \perp K|L.$

Méthode Volumes Finis

Soit $K \in \Omega_i$, soit u vérifiant $u_t - \Delta\varphi_i(u) = 0$. On intègre sur le volume de contrôle K :

$$\int_K u_t dx - \int_{\partial K} \nabla\varphi_i(u) \cdot \mathbf{n}_K d\sigma = 0$$

$$t \in]n\delta t, (n+1)\delta t[, \quad \int_K u_t(x, t) dx \simeq \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\delta t} m(K)$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \nabla\varphi_i(u) \cdot \mathbf{n}_K d\sigma &= \sum_{\sigma \subset \partial K} \int_{\sigma} \nabla\varphi_i(u) \cdot \mathbf{n}_K d\sigma \\ &\simeq \sum_{\sigma \subset \partial K} m(\sigma) \frac{\varphi_i(u_K^{n+1}) - \varphi_i(u_L^{n+1})}{d(x_K, x_L)} \end{aligned}$$

Méthode Volumes Finis

Soit $K \in \Omega_i$, soit u vérifiant $u_t - \Delta\varphi_i(u) = 0$. On intègre sur le volume de contrôle K :

$$\int_K u_t dx - \int_{\partial K} \nabla\varphi_i(u) \cdot \mathbf{n}_K d\sigma = 0$$

$$t \in]n\delta t, (n+1)\delta t[, \quad \int_K u_t(x, t) dx \simeq \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\delta t} m(K)$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \nabla\varphi_i(u) \cdot \mathbf{n}_K d\sigma &= \sum_{\sigma \subset \partial K} \int_{\sigma} \nabla\varphi_i(u) \cdot \mathbf{n}_K d\sigma \\ &\simeq \sum_{\sigma \subset \partial K} m(\sigma) \frac{\varphi_i(u_K^{n+1}) - \varphi_i(u_L^{n+1})}{d(x_K, x_L)} \end{aligned}$$

Soit $K \in \Omega_i$, soit u vérifiant $u_t - \Delta\varphi_i(u) = 0$. On intègre sur le volume de contrôle K :

$$\int_K u_t dx - \int_{\partial K} \nabla\varphi_i(u) \cdot \mathbf{n}_K d\sigma = 0$$

$$t \in]n\delta t, (n+1)\delta t[, \quad \int_K u_t(x, t) dx \simeq \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\delta t} m(K)$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \nabla\varphi_i(u) \cdot \mathbf{n}_K d\sigma &= \sum_{\sigma \subset \partial K} \int_{\sigma} \nabla\varphi_i(u) \cdot \mathbf{n}_K d\sigma \\ &\simeq \sum_{\sigma \subset \partial K} m(\sigma) \frac{\varphi_i(u_K^{n+1}) - \varphi_i(u_L^{n+1})}{d(x_K, x_L)} \end{aligned}$$

Cas des volumes non strictement immergés

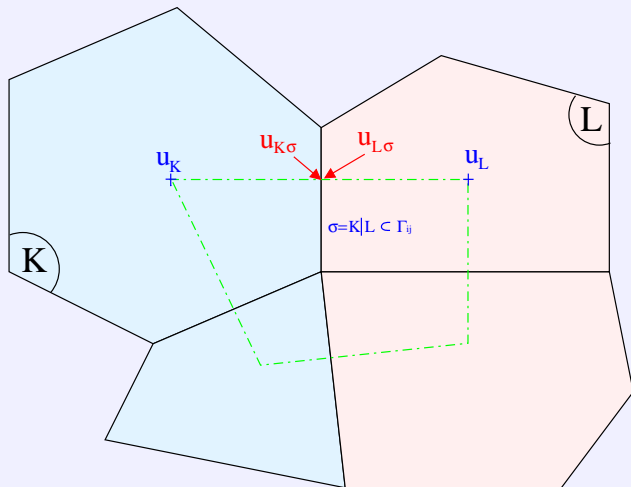


FIG.: Cas des volumes non immergés

Conditions de transmission

Soit $\sigma = K|L \subset \Gamma_{i,j}$, $K \subset \Omega_i$, $L \subset \Omega_j$.

A travers σ , on veut :

$$\begin{cases} \pi_i(u_i) = \pi_j(u_j) \\ \int_{\sigma} \nabla \varphi_i(u_i) \cdot \mathbf{n}_i + \int_{\sigma} \nabla \varphi_j(u_j) \cdot \mathbf{n}_j = 0 \end{cases}$$

}|

$$\begin{cases} \pi_i(u_{K,\sigma}^{n+1}) = \pi_j(u_{L,\sigma}^{n+1}) \\ m(\sigma) \left(\frac{\varphi_i(u_{K,\sigma}^{n+1}) - \varphi_i(u_K^{n+1})}{d(x_K, \sigma)} + \frac{\varphi_j(u_{L,\sigma}^{n+1}) - \varphi_j(u_L^{n+1})}{d(x_L, \sigma)} \right) = 0 \end{cases}$$

Un schéma Volumes Finis

$\forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \{0, \dots, M\}$:

$$m(K) \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\delta t} + \sum_{L \in \mathcal{N}_{K,i}} \tau_{K|L} (\varphi(u_K^{n+1}, x_K) - \varphi(u_L^{n+1}, x_L)) + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \tau_{K,\sigma} (\varphi(u_K^{n+1}, x_K) - \varphi(u_{K,\sigma}^{n+1}, x_K)) = 0$$

avec :

- $\tau_{K|L} = \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)}$ et $\tau_{K,\sigma} = \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)}$
- $\forall K \in \mathcal{T}, u_K^0 = \frac{1}{K} \int_K u_0(x) dx$
- $(u_{K,K|L}^{n+1}, u_{L,K|L}^{n+1})$ est l'unique solution de :

$$\begin{cases} \tau_{K,K|L} (\varphi(u_K^{n+1}, x_K) - \varphi(u_{K,K|L}^{n+1}, x_K)) \\ \quad + \tau_{L,K|L} (\varphi(u_L^{n+1}, x_L) - \varphi(u_{L,K|L}^{n+1}, x_L)) = 0 \\ \pi(u_{K,K|L}^{n+1}, x_K) = \pi(u_{L,K|L}^{n+1}, x_L). \end{cases}$$

Définition

$$\mathcal{X}(\mathcal{D}) = \left\{ \begin{array}{l} v \in L^\infty(\Omega \times (0, T)), \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \{0, \dots, M\}, \\ \exists v_K^{n+1}, v(x, t) = v_K^{n+1} \text{ a.e. dans } K \times (t^n, t^{n+1}) \end{array} \right\}.$$

Lemme

*Il existe une unique solution discrète $u_{\mathcal{D}} \in \mathcal{X}(\mathcal{D})$ au schéma.
De plus, $0 \leq u_{\mathcal{D}} \leq 1$.*

On notera de manière condensée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathcal{D}} u_{\mathcal{D}}(x, t) - \Delta_{\mathcal{D}} \varphi_i(u_{\mathcal{D}}(x, t)) = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \\ (\mathbf{n}_i \cdot \nabla)_{\mathcal{D}} \varphi_i(u_{\mathcal{D}}(x, t)) + (\mathbf{n}_j \cdot \nabla)_{\mathcal{D}} \varphi_j(u_{\mathcal{D}}(x, t)) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{i,j} \\ \gamma_{\mathcal{D}}(\pi_i(u_{\mathcal{D}}(x, t))) = \gamma_{\mathcal{D}}(\pi_j(u_{\mathcal{D}}(x, t))) \quad \text{sur } \Gamma_{i,j} \end{array} \right.$$

Définition

① *Semi-norme $L^2(0, T; H^1(\Omega_i))$ discrète sur $\mathcal{X}(\mathcal{D})$:*

$$|v|_{1,\mathcal{D},i}^2 = \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K|L \in \mathcal{E}_i} \tau_{K|L} (v_K^{n+1} - v_L^{n+1})^2 = \int_0^T \int_{\Omega_i} |\nabla_{\mathcal{D}} v_{\mathcal{D}}|^2 dx dt.$$

② *Semi-norme $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ discrète sur $\mathcal{X}(\mathcal{D})$:*

$$\begin{aligned} |v|_{1,\mathcal{D}}^2 &= \sum_{i=1}^N |v|_{1,\mathcal{D},i}^2 + \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{F}} \left[\tau_{K|L} (v_K^{n+1} - v_L^{n+1})^2 \right] \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla_{\mathcal{D}} v_{\mathcal{D}}|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Lemme

Il existe C_1, C_2 , indépendantes du pas de maillage, telles que :

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} |\nabla_{\mathcal{D}} \varphi_i(u_{\mathcal{D}}(x, t))|^2 dx dt \leq C_1,$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla_{\mathcal{D}} \Pi(u_{\mathcal{D}}(x, t), x)|^2 dx dt \leq C_2.$$

- Majoration des translatés en espace,
- Majoration des translatés en temps via le schéma.

Lemme

$(\varphi_i(u_{\mathcal{D}}))_{\mathcal{D}}$ (resp. $(\Pi(u_{\mathcal{D}}, \cdot))_{\mathcal{D}}$) est compacte dans $L^2(\Omega_i \times (0, T))$ (resp. $L^2(\Omega \times (0, T))$).

Soit $(\mathcal{D}_m)_m$ une suite de discrétisations Volumes finis de $\Omega \times (0, T)$ à régularité bornée, et vérifiant $\lim_m \text{size}(\mathcal{D}_m) = 0$.

Alors, à une sous-suite près :

- $u_{\mathcal{D}_m} \rightharpoonup u$ in $L^\infty(\Omega \times (0, T))$ weak- \star .
- $\varphi_i(u_{\mathcal{D}_m}) \rightarrow \varphi_i(u)$ in $L^2(\Omega_i \times (0, T))$.
- $\Pi(u_{\mathcal{D}_m}, \cdot) \rightarrow \Pi(u, \cdot)$ in $L^2(\Omega \times (0, T))$.

De plus :

$$\Pi(u, \cdot) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

$$\varphi_i(u) \in L^2(0, T; H^1(\Omega_i)).$$

Convergence : u est une solution faible du problème.

- 1 Le problème physique
- 2 Existence d'une solution faible
- 3 Continuité temporelle d'une solution**
- 4 Un résultat d'unicité
- 5 Essai numérique
- 6 Conclusion

Hypothèse

Soit $(\mathcal{D}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une famille de discrétisations Volumes finis $\Omega \times (0, T)$, vérifiant de plus : $\exists S_1 > 0$ indépendante de m ,

$$\max_m \frac{\delta t_m}{(\text{size}(\mathcal{T}_m))^2} \leq S_1.$$

Hypothèse

$$\varphi(u_0, \cdot) \in H_{pw}^1(\Omega).$$

Estimations $H^1(0, T, L^2(\omega_j))$ et $L^\infty(0, T, H^1(\omega_j))$ discrètes

Lemme

Soit $O_j \subset \Omega_j$ tel que $\varphi_j(u_0) \in H^1(O_j)$. Soit ω_j tel que $\omega_j \in O_j$. Soit $(\mathcal{D}_m)_m$ une suite de discrétisations vérifiant l'hypothèse CFL. Alors il existe C_3, C_4 telles que pour tout m ,

$$\int_0^T \int_{\omega_j} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathcal{D}} (\varphi_j(u_{\mathcal{D}}(x, t))) \right|^2 dx dt \leq C_3.$$

$$\max_{t \in [0, T]} \int_{\omega_j} |\nabla_{\mathcal{D}} \varphi_j(u_{\mathcal{D}}(x, t))|^2 dx \leq C_4.$$

Proposition

Il existe une solution faible appartenant à $C([0, T], L^p(\Omega))$,
 $\forall p \in [1, +\infty)$.

plan de la preuve

- $\forall \omega_j \subset\subset O_j$, $\varphi_i(u) \in C([0, T], L^2(\omega_j))$, grâce au théorème d'Ascoli.
- $\forall \varepsilon > 0$, on peut prendre $(\omega_j)_j$ tel que $m(\Omega \setminus \bigcup \omega_j) \leq \varepsilon$, alors : $\varphi(u, \cdot) \in C([0, T], L^2(\Omega))$.
- Comme $\varphi_i^{(-1)}$ et $s \mapsto s^p$ sont continues, et $u \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$, on obtient :

$$\forall p \in [1, +\infty), u \in C([0, T], L^p(\Omega))$$

- 1 Le problème physique
- 2 Existence d'une solution faible
- 3 Continuité temporelle d'une solution
- 4 Un résultat d'unicité**
- 5 Essai numérique
- 6 Conclusion

Soit v une solution faible $C([0, T], L^1(\Omega))$ du problème avec donnée initiale v_0 . Par dédoublement de variable décentré en temps, on obtient le principe de comparaison suivant :

Théorème

On suppose v_0 suffisamment régulière, et de plus, on suppose :
 $\forall i \in \{1, \dots, N\}, (\varphi_i \circ \Pi_i^{(-1)})'$ est lipschitzienne.
Alors toute solution faible u vérifie :

$$\int_0^T \int_{\Omega} |u(x, t) - v(x, t)|^{\pm} dx dt \leq T \int_{\Omega} |u_0(x) - v_0(x)|^{\pm} dx$$

On suppose dans le théorème suivant que : $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $(\varphi_i \circ \Pi_i^{(-1)})'$ est lipschitzienne. Alors on déduit du théorème précédent :

Théorème

On a unicité de la solution faible u au problème pour :

- $\varphi(u_0, \cdot) \in H_{pw}^1(\Omega)$
- u_0 est limite au sens $L^1(\Omega)$ d'une suite croissante $(v_{0,n})_n$ et d'une suite décroissante $(w_{0,n})_n$ de fonctions de $H_{pw}^1(\Omega)$.

Dans les deux cas, $u \in C^0([0, T], L^p(\Omega))$, $\forall p \in [1, +\infty)$

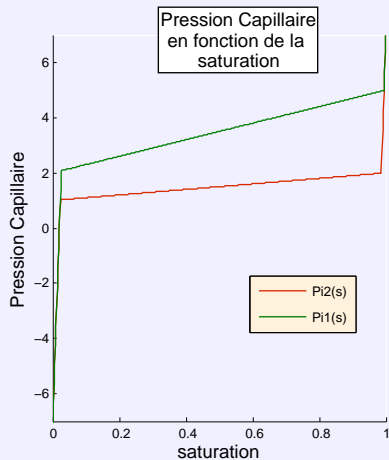
- 1 Le problème physique
- 2 Existence d'une solution faible
- 3 Continuité temporelle d'une solution
- 4 Un résultat d'unicité
- 5 Essai numérique**
- 6 Conclusion

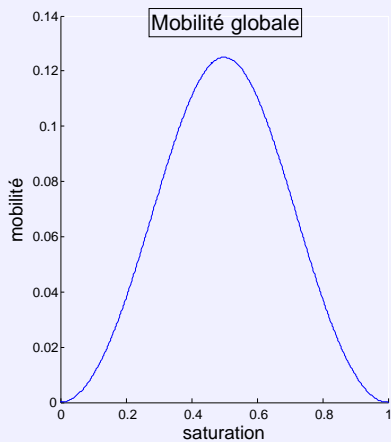
Résolution approchée en 1D dans un cas où il n'y a que 2 domaines :

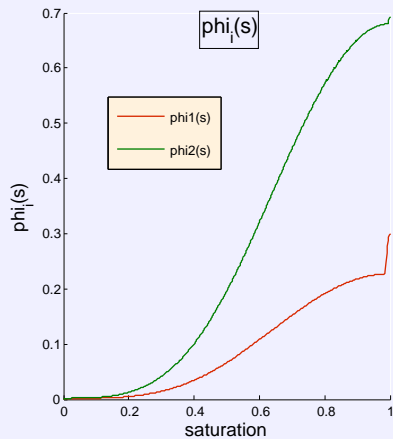
- $\Omega =] - 1, 1[$,
- $\Omega_1 =] - 1, 0[$,
- $\Omega_2 =]0, 1[$,

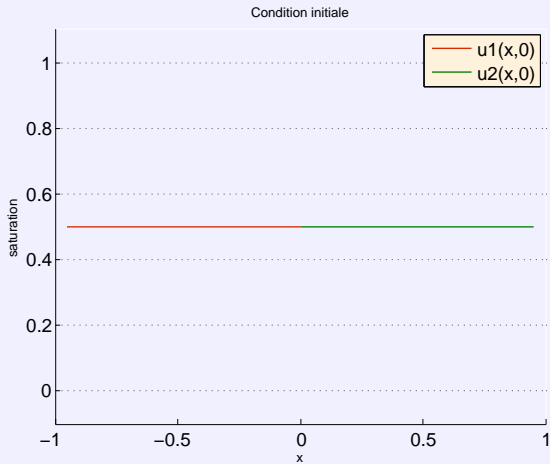
- $\lambda_1(s) = \lambda_2(s) = \frac{s^2(1-s)^2}{s^2 + (1-s)^2}$,

$$\begin{cases} u_t - (\varphi_i(u))_{xx} = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ \Pi_1(u_1(0, t)) = \Pi_2(u_2(0, t)), \\ \varphi_1(u_1)_x(0, t) = \varphi_2(u_2)_x(0, t). \end{cases}$$

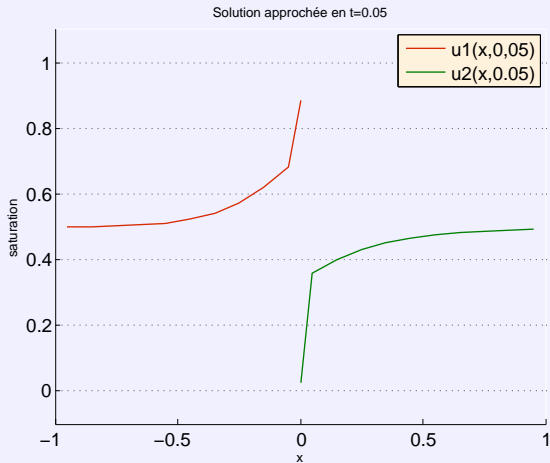


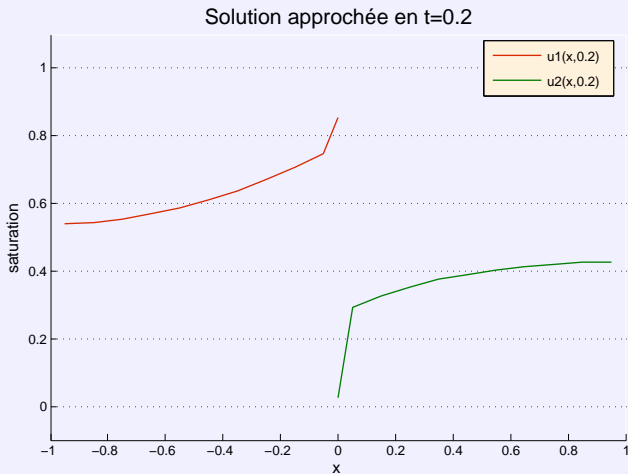


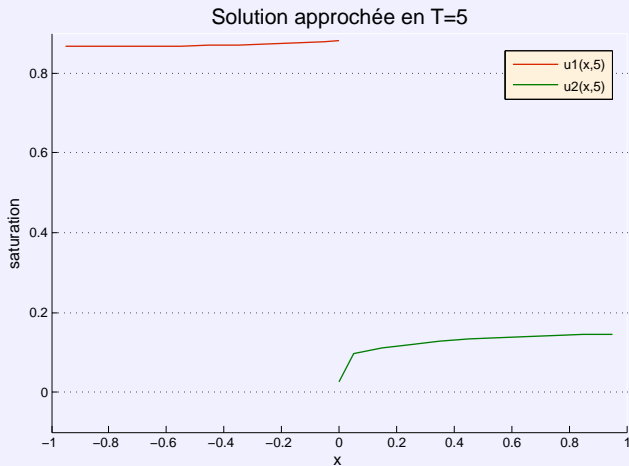




Essai Numérique







- 1 Le problème physique
- 2 Existence d'une solution faible
- 3 Continuité temporelle d'une solution
- 4 Un résultat d'unicité
- 5 Essai numérique
- 6 Conclusion

Théorème

Soit \mathcal{D} un maillage admissible de Ω .

Soit $0 \leq u_0 \leq 1$ tel que $\varphi_i(u_0) \in H_{pw}^1(\Omega_i)$.

On suppose : $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $(\varphi_i \circ \Pi_i^{(-1)})'$ est lipschitzienne.

$u_{\mathcal{D}} \rightarrow u \in L^p(\Omega \times (0, T))$ quand $size(\mathcal{D}) \rightarrow 0$, $\forall p \in [1, +\infty)$

où u est l'unique solution au problème. De plus, on a le résultat de régularité suivant :

$$u \in C^0([0, T], L^p(\Omega)), \quad \forall p \in [1, +\infty)$$

- Ajout d'un terme convectif,
- Estimations d'erreur,
- Traitement du cas avec barrières capillaires (cf. G. Enchéry, R. Eymard, A. Michel),
- Calcul numérique multidimensionnel,
- Comportement asymptotique pour $\pi(u, x) \rightarrow \pi(x)$.