Modélisation des ondes de surface en présence d'un fond aléatoire

A. de Bouard, W. Craig, P. Guyenne, C. Sulem

Position du problème

Fluide irrotationnel, incompressible et non visqueux, occupant un domaine

$$S(\beta,\eta) = \{(x,y),\ -h+\beta(x) < y < \eta(x)\}$$

$\eta(t,x)$: élévation de la surface

$\beta(x)$: variation du fond / valeur moyenne

- pas de dépendance de la surface ni du fond / variable transverse : ondes unidimensionnelles
- fluide évoluant sous la seule action de la gravité (pas d'effet de tension de surface)

But :

Obtenir un modèle pour l'évolution de la surface libre dans l'approximation ondes longues, faible amplitude

λ : longueur d'onde , $\lambda \gg h$

a : amplitude typique, $a \ll h$

Balance effets non linéaires et dispersifs : $\dfrac{a}{h} \sim \dfrac{h^2}{\lambda^2}$

Particularité :

On autorise des variations de $\beta(x)$ sur des échelles $\ll \lambda$

Large littérature (physique et mathématique) sur modélisation des ondes en présence de fond variable

• En général variations du fond sur mêmes échelles que la longueur d'ondes, mais pas nécessairement de petite amplitude

◦ Fond déterministe : ondes longues $\rightsquigarrow$ système de type Boussinesq, avec coefficients variables (1-D ou 2-D) :

Peregrine (J. Fluid. Mech., 1967), ..., Mei-Liu (Ann. Rev. F. M., 1993), ..., Chen (Math. Comp. Simul., 2003), Chazel (2007)

◦ Fond aléatoire (problème non linéaire) :

Howe (J. Fluid. Mech., 1971), Mei-Hancock (J.Fluid Mech., 2003), Pihl-Mei-Hancock (2-D) (Phys. Rev.E, 2002)

Ondes longues : Grataloupe-Mei (Phys. Rev.E, 2003), Mei-Li (Phys. Rev. E, 2004)

• Si variations du fond sur des échelles $\ll \lambda$, nécessité structure supplémentaire pour décrire le modèle uniquement sur les grandes échelles; ondes longues :

∘ Fond périodiques (variations d'ordre un)

Rosales-Papanicolaou (1-D) (Stud. Appl. Math., 1983), Craig-Guyenne-Nicholls-Sulem (Proc. Roy. Soc. London A, 2005) (formulation hamiltonienne, 1-D ou 2-D + variations sur 2 échelles)

∘ Fond aléatoire (1-D), processus stationnaire, ergodique

Rosales-Papanicolaou (1983) : $\beta(x) = \partial_x \mu(x)$, μ processus stationnaire

Formulation de Bernoulli

$u(t,x,y)$: vitesse du fluide; $u = \nabla\varphi$

rappel : $S(\beta,\eta) = \{(x,y),\ -h+\beta(x) < y < \eta(x)\}$

On prendra β aléatoire $\beta(x) = \beta(x,\omega)$ (régulière)

Equations pour (φ,η) :

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \quad \text{dans} \quad S(\beta,\eta) \\ \partial_t\varphi = -g\eta - \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 \quad \text{en} \quad y = \eta(t,x) \\ \partial_t\eta = \partial_y\varphi - \partial_x\eta.\partial_x\varphi \quad \text{en} \quad y = \eta(t,x) \\ \nabla\varphi.\vec{n}(\beta) = 0 \quad \text{en} \quad y = -h+\beta(x) \end{cases}$$

où g est la gravité, $\vec{n}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1+|\partial_x\beta|^2}}(\partial_x\beta,-1)$ est la normale sortante au fond.

Formulation hamiltonienne (Zakharov)

On note $\xi(x) = \varphi(x, \eta(x))$ le potentiel sur la surface. Le système d'équations d'évolution précédentes s'écrit alors sous la forme hamiltonienne :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\eta H \\ \partial_\xi H \end{pmatrix} = J \nabla H(\eta, \xi)$$

où

$$\begin{aligned} H(\eta, \xi) &= \frac{1}{2} \int \int_{-h+\beta(x)}^{\eta(x)} |\nabla \varphi(x, y)|^2 dx dy + \frac{1}{2} \int g \eta^2(x) dx \\ &= \int_{\partial S} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{2} \int g \eta^2(x) dx \end{aligned}$$

puisque φ est solution de l'équation de Laplace dans $S(\beta, \eta)$.

Remarque : il suffit de connaître le potentiel à la surface : si $\xi(x)$ donné, on résoud en φ l'équation

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \Delta\varphi = 0 \quad \text{dans} \quad S(\beta,\eta) \\ \nabla\varphi.\vec{n} = 0 \quad \text{en} \quad y = -h + \beta(x) \\ \varphi(x,\eta(x)) = \xi(x) \quad \text{en} \quad y = \eta(x) \end{cases}$$

et on note $G(\beta,\eta)$, l'opérateur de Dirichlet-Neumann, qui à ξ associe

$$G(\beta,\eta)\xi(x) = \nabla\varphi(x,\eta(x)).\vec{n}(\eta)(1 + |\partial_x\eta|^2)^{1/2}.$$

On suppose, par exemple, $\beta(x,\omega) \leq \frac{h}{2}$ pour tout (x,ω).

L'hamiltonien s'écrit

$$H(\xi,\eta) = \int \frac{1}{2}\xi(x)G(\beta,\eta)\xi(x)dx + \int \frac{g}{2}\eta^2(x)dx$$

Décomposition de l'opérateur de Dirichlet-Neumann

- si $\beta \equiv 0$, $\eta \equiv 0$, alors $G(0,0)\xi = D\tanh(hD)\xi$ (où $D = i\partial_x$)
- si $\eta \equiv 0$, $\beta \neq 0$, on obtient formellement

$$\varphi^{(0)}(x,y) = \left(\frac{\cosh((y+h)D)}{\cosh(hD)}\xi\right)(x) + (\sinh(hD)L(\beta)\xi)(x)$$

où $L(\beta)$ opérateur linéaire, dépendant de manière non linéaire et non locale de β.

Graig-Guyenne-Nicholls-Sulem (2005) : L'opérateur $L(\beta)$ se décompose formellement à l'ordre deux en $L(\beta) = L_1(\beta) + L_2(\beta) + O(\beta^3)$ où

$$\begin{cases} L_1(\beta) = -\mathrm{sech}(hD)\beta\mathrm{sech}(hD)D \\ L_2(\beta) = \mathrm{sech}(hD)\beta D\sinh(hD)L_1(\beta) \end{cases}$$

• A l'ordre 0 en η, $G^{(0)}\xi = D\tanh(hD)\xi + DL(\beta)\xi$.

• A l'ordre un en η : on fixe $\xi(x)$; si $\varphi(x,y) = \varphi^{(0)}(x,y) + \varphi^{(1)}(x,y)$ est le potentiel résolvant le système $(\mathcal{S})$, tronqué à l'ordre un en η, alors

$$\varphi^{(1)}(x,0) = -\eta\partial_y\varphi^{(0)}(x,0) = -\eta(x)(G^{(0)}\xi)(x).$$

De plus, à l'ordre un,

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi^{(0)} + \varphi^{(1)}).\vec{n}(\eta) &= \partial_y\varphi^{(0)}(x,0) - \partial_x\varphi^{(0)}(x,0)\partial_x\eta + \eta\partial_y^2\varphi^{(0)}(x,0) \\ &\quad +\partial_y\varphi^{(1)}(x,0) + o(\eta^2) \\ &= G^{(0)}\xi + D(\eta D\xi) - G^{(0)}\eta G^{(0)}\xi + o(\eta^2)\end{aligned}$$

• A l'ordre l : on obtient une formule pour G^l par récurrence ; Craig-Guyenne-Nicholls-Sulem, 2005; Craig-Sulem, 1992 pour le fond plat.

Remarque : Chazel (2007) : développement rigoureux de l'opérateur de D.N. à l'ordre deux (mais avec bornes régulières sur β)

En reportant les développements précédents dans l'hamiltonien, et après intégration par parties :

$$\begin{aligned} H(\eta,\beta)(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\int(\xi D\tanh(hD)\xi + g\eta^2)dx - \frac{1}{2}\int \beta|D\mathrm{sech}(hD)\xi|^2 dx \\ &\quad +\frac{1}{2}\int \xi(D\eta D - D\tanh(hD)\eta D\tanh(hD))\xi dx \\ &\quad -\frac{1}{2}\int \overline{(D\mathrm{sech}(hD)\xi)}\beta D\tanh(hD)\beta D\mathrm{sech}(hD)\xi dx \\ &\quad +\mathcal{O}(\beta^3\xi^2) + \mathcal{O}(\eta\beta\xi^2) + \mathcal{O}(\eta^2\xi^2)\ . \end{aligned}$$

Changement d'échelle :

• On se place à l'échelle de la longueur d'onde $\lambda \gg h$; pour simplifier on fixe $h = \mathcal{O}(1)$; on pose $\varepsilon = \frac{1}{\lambda}$ et $X = \varepsilon x$

• Balance effets non linéaires et dispersifs: $\frac{a}{h} \sim a \sim \varepsilon^2$ d'où

$$\eta(x) = \varepsilon^2 \tilde{\eta}(X), \quad \xi(x) = \varepsilon \tilde{\xi}(X) \quad (a\lambda\sqrt{\frac{g}{h}} \sim \varepsilon) \quad \text{et} \quad \tilde{t} = \varepsilon t$$

• Variations du fond en $\mathcal{O}(\varepsilon) \rightsquigarrow$ supérieures à celles de l'élevation de la surface : $\beta(x,\omega) = \varepsilon\tilde{\beta}(x,\omega)$ ($\tilde{\beta}$ et $\partial_x\tilde{\beta}$ sont supposées bornées, uniformément en ω)

• Développement multi-échelle : $D \rightsquigarrow D_x + \varepsilon D_X$ à l'ordre ε^5 (ordre usuel pour tenir compte effets non linéaires + dispersifs)

On obtient :

$$
\begin{aligned}
H(\eta,\beta;\varepsilon) \quad = \quad & \frac{\varepsilon^3}{2}\int (h|D_X\xi|^2 + g\eta^2)dX - \frac{\varepsilon^4}{2}\int \beta(x)|D_X\xi|^2 dX \\
& + \frac{\varepsilon^5}{2}\int (\xi D_X \eta D_X \xi - \frac{h^3}{3}\xi D_X^4 \xi)dX \\
& - \frac{\varepsilon^5}{2}\int \Big(\beta(x) D_x \tanh(hD_x)\beta(x)\Big)|D_X\xi|^2 dX + o(\varepsilon^5) \ .
\end{aligned}
$$

Il faut donc déterminer le comportement pour $\varepsilon \ll 1$ de

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \beta(X/\varepsilon;\omega)|D_X\xi(X)|^2 \, dX
$$

et de

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\beta D_x \tanh(hD_x)\beta\big)(X/\varepsilon)|D_X\xi(X)|^2 \, dX \ .
$$

Cas périodique $\rightsquigarrow$ Craig-Guyenne-Nicholls-Sulem, 2005.

Modélisation du fond : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, espace probabilisé

∘ $\beta = \beta(x, \omega)$ processus stationnaire, à moyenne nulle :

- $\forall x \in \mathsf{R}, \quad \mathsf{E}(\beta(x)) = 0$
- $\beta(., \omega)$ variable aléatoire à valeurs dans $C^1(\mathsf{R})$ et $\forall y \in \mathsf{R}$,

$$\mathcal{L}(\tau_y \beta) = \mathcal{L}(\beta) \quad \text{avec} \quad \tau_y \beta(x, \omega) = \beta(x - y, \omega)$$

∘ Propriété de mélange (décorrélations sur les grandes échelles)

$A \in \mathcal{F}$ ne dépendant que de $\{\beta(x), x \geq 0\}$ et $B \in \mathcal{F}$ ne dépendant que de $\{\beta(x), x \leq 0\}$ alors

$$|\mathsf{P}(A \cap \tau_y(B)) - \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)| \leq \varphi(y)\sqrt{\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)}$$

où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{1/2}(y) dy < +\infty \quad \text{et} \quad \varphi(y) = \mathcal{O}(|y|^{-\alpha}), \quad \alpha > 0$$

Conséquences :

• β est ergodique donc

$$\frac{\varepsilon}{X}\int_0^{X/\varepsilon}\beta(u)du \to 0, \quad \text{p.s.} \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0$$

on en déduit (intégration par parties)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\beta(\frac{X}{\varepsilon})|D_X\xi(X)|^2 dX \to 0, \quad \text{p.s.} \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0$$

• Le processus $\beta(x)D_x\tanh(hD_x)\beta(x)$ est également stationnaire et ergodique (au moins dans un sens faible) et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\beta(\frac{X}{\varepsilon})(D_x\tanh(hD_x)\beta)(\frac{X}{\varepsilon})|D_X\xi(X)|^2 dX$$

converge vers

$$\mathsf{E}[\beta(0)D_x\tanh(h\beta)(0)]\int_{-\infty}^{+\infty}|D_X\xi(X)|^2 dX$$

• On a mieux : théorème central limite (fonctionnel) :

$$\rightsquigarrow \quad Y_\varepsilon(\beta)(X) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sigma_\beta} \int_0^{X/\varepsilon} \beta(y)dy, \quad \text{alors} \quad Y_\varepsilon(\beta) \rightharpoonup B(.,\omega) \quad \text{en loi}$$

où β est un mouvement brownien sur R et

$$\sigma_\beta = 2\int_0^{+\infty} \rho_\beta(y)dy, \quad \rho_\beta(y) = \mathsf{E}(\beta(y)\beta(0)) = \mathsf{E}(\beta(x+y)\beta(x))$$

Formellement :

$$\int \beta(\frac{X}{\varepsilon})f(X)dX = \sqrt{\varepsilon}\sigma_\beta \int \partial_X B(X)f(X)dX + o(\sqrt{\varepsilon})$$

Remarque : si $\beta(x,\omega) = \partial_x \gamma(x,\omega)$ où γ processus stationnaire (mélangeant) alors $\sigma_\beta = 0$ et

$$\int \beta(\frac{X}{\varepsilon})f(X)dX = \varepsilon^{3/2}\sigma_\gamma \int \partial_X^2 B(X)f(X)dX + o(\varepsilon^{3/2})$$

Le régime Boussinesq :

On injecte l'asymptotique précédente dans l'hamiltonien H (ordre 5 en ε)

$$H = \frac{\varepsilon^3}{2}\int \Big((h - \varepsilon^{3/2}\sigma_\beta \Gamma_\omega(X) - \varepsilon^2 a)|D_X\xi|^2 + g\eta^2\Big)dX \\ + \frac{\varepsilon^5}{2}\int (\xi D_X \eta D_X \xi - \frac{h^3}{3}\xi D_X^4 \xi)dX + o(\varepsilon^5).$$

où

$$a := \mathsf{E}(\beta D_x \tanh(hD_x)\beta) = (D_y \tanh(hD_y)\rho_\beta)(0)$$

et $\Gamma_\omega = \partial_X B_\omega$ est un bruit blanc (! seulement $C^{-\alpha}$ avec $\alpha > 1/2$).

Formellement,

$$h_0(X) = h - \varepsilon^{3/2}\sigma_\beta \Gamma_\omega(X) - \varepsilon^2 a$$

joue le rôle d'une profondeur "effective" stochastique.

Changement de variable : $(\eta, \xi) \to (\eta, u)$ où $u = \partial_x \xi$ (vitesse du fluide à la surface)

$$H_1(\eta, u) = \frac{\varepsilon^3}{2} \int (h_0(X)u^2 + g\eta^2) - (\frac{\varepsilon^2 h^3}{3}(\partial_X u)^2 - \varepsilon^2 \eta u^2) dX$$

d'où (avec changement d'échelle)

$$\partial_t \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} \partial_\eta H_1 \\ \partial_u H_1 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \varepsilon^{-3} \begin{pmatrix} 0 & -\partial_X \\ -\partial_X & 0 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\begin{cases} \partial_t \eta &= -\partial_X((h_0(X) + \varepsilon^2 \eta)u) - \varepsilon^2 \dfrac{h^3}{3} \partial_X^3 u \ , \\ \partial_t u &= -g\partial_X \eta - \varepsilon^2 u \partial_X u \ . \end{cases}$$

Problèmes :

- Système déterministe (h_0 =cste) linéairement mal posé
- $\partial_X h_0(X)$ comporte un terme $\partial_X^2 B_\omega$ très irrégulier

Le régime KdV :

Equation de KdV obtenue à partir de la formulation hamiltonienne en se plaçant dans le repère $Y = X - \sqrt{g\tilde{h}}\,t$, où $\tilde{h}$ est la profondeur effective. Ici :

$$\tilde{h} = h_0(X) = h - \varepsilon^{3/2}\sigma_\beta \partial_X B_\omega - \varepsilon^2 a$$

$\rightsquigarrow$ impossible de justifier le changement de variables (irrégularité de h_0)

$\rightsquigarrow$ utilisation d'une profondeur "effective" régularisée :

$$h_\varepsilon(X) = h - \varepsilon\beta(\frac{X}{\varepsilon}) - \varepsilon^2 a$$

Changement de variable : $(\eta, \xi) \to (\eta, u)$, où $u = \partial_X \xi$, et $h_0(X)$ remplaçée par $h_\varepsilon(X)$

$$\rightsquigarrow \quad H_1^\varepsilon(\eta, u) = \frac{\varepsilon^3}{2}\int (h_\varepsilon(X)u^2 + g\eta^2) - \varepsilon^2(\frac{h^3}{3}(\partial_X u)^2 - \eta u^2)dX$$

Changements de variables successifs :

$$\eta = \left(\frac{h_\varepsilon}{4g}\right)^{1/4}(r+s), \qquad u = \left(\frac{g}{4h_\varepsilon}\right)^{1/4}(r-s)$$

$\rightsquigarrow$ Nouvelle forme hamiltonienne avec h_ε remplaçée par h dans les termes en $\mathcal{O}(\varepsilon^5)$. On note

$$c_1 = \frac{h^3}{3}\sqrt{\frac{g}{4h}}, \qquad c_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{4h}\right)^{1/4}$$

alors

$$\partial_t r = -\partial_X\left[\sqrt{gh_\varepsilon}r + \varepsilon^2\left(c_1(\partial_X^2 r - \partial_X^2 s) + \tfrac{1}{2}c_2(3r^2 - 2rs - s^2)\right)\right]$$
$$-\tfrac{1}{4}\tfrac{\partial_X h_\varepsilon}{h_\varepsilon}\left[\sqrt{gh_\varepsilon}s + \varepsilon^2\left(c_1(\partial_X^2 s - \partial_X^2 r) + \tfrac{1}{2}c_2(-r^2 - 2rs + 3s^2)\right)\right]$$

$$\partial_t s = \partial_X\left[\sqrt{gh_\varepsilon}s + \varepsilon^2\left(c_1(\partial_X^2 s - \partial_X^2 r) + \tfrac{1}{2}c_2(-r^2 - 2rs + 3s^2)\right)\right]$$
$$+\tfrac{1}{4}\tfrac{\partial_X h_\varepsilon}{h_\varepsilon}\left[\sqrt{gh_\varepsilon}r + \varepsilon^2\left(c_1(\partial_X^2 r - \partial_X^2 s) + \tfrac{1}{2}c_2(3r^2 - 2rs - s^2)\right)\right]$$

Nouveau changement d'échelle sur s : $s_1 = \varepsilon^{-3/2} s$ (traduit le fait que l'on regarde des ondes se propageant vers la droite) : si $s_1 = \mathcal{O}(1)$ alors $s \ll r$ (pas de "backscattering").

$$\partial_t r = -\partial_X \left[\sqrt{g h_\varepsilon(X)}\, r + \varepsilon^2 (c_1 \partial_X^2 r + \tfrac{3}{2} c_2 r^2) \right]$$
$$- \tfrac{1}{4} \varepsilon^{3/2} \frac{\partial_x \beta(X/\varepsilon)}{h_\varepsilon} \sqrt{g h_\varepsilon}\, s_1 + \tfrac{1}{4} \frac{\partial_x \beta(X/\varepsilon)}{h_\varepsilon} \varepsilon^2 (c_1 \partial_X^2 r + \tfrac{1}{2} c_2 r^2)$$

$$\partial_t s_1 = \partial_X \left[\sqrt{g h_\varepsilon(X)}\, s_1 - \varepsilon^{1/2} (c_1 \partial_X^2 r + \tfrac{1}{2} c_2 r^2) \right]$$
$$+ \tfrac{1}{4} \varepsilon^{-3/2} \frac{\partial_x \beta(X/\varepsilon)}{h_\varepsilon} \sqrt{g h_\varepsilon}\, r + \tfrac{1}{4} \frac{\partial_x \beta(X/\varepsilon)}{h_\varepsilon} \varepsilon^{1/2} (c_1 \partial_X^2 r + \tfrac{3}{2} c_2 r^2) \; .$$

Formellement

$$\varepsilon^{-3/2} \partial_x \beta(X/\varepsilon) \sqrt{\frac{g}{h}}\; r \to \sigma_\beta \sqrt{\frac{g}{h}} (\partial_X^2 B_\omega)(X)\; r$$

et

$$\varepsilon^{3/2} \partial_x \beta(X/\varepsilon) \sqrt{\frac{g}{h_\varepsilon}} s_1 = \varepsilon^2 \sigma_{(\partial_x \beta)} (\partial_X B_\omega) \sqrt{\frac{g}{h}} s_1 + o(\varepsilon^2) = o(\varepsilon^2)$$

D'où les équations à l'ordre principal :

$$\partial_t r = -\partial_X \left[\sqrt{g h_\varepsilon(X)} r + \varepsilon^2 (c_1 \partial_X^2 r + \tfrac{3}{2} c_2 r^2) \right.$$

$$\partial_t s_1 = \partial_X \left[\sqrt{g h_\varepsilon(X)} s_1 \right] + \tfrac{1}{4} \sqrt{\tfrac{g}{h}} \varepsilon^{-3/2} \partial_x \beta(X/\varepsilon) r$$

Remarque : Au premier ordre,

$$\partial_t s_1 = \sqrt{gh} s_1 \partial_X + \tfrac{1}{4} \sqrt{\tfrac{g}{h}} \varepsilon^{-3/2} \partial_x \beta(X/\varepsilon) r$$

car

$$\partial_X (\sqrt{g h_\varepsilon(X)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_X (\varepsilon \beta(\frac{X}{\varepsilon})) + o(1) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} (\partial_x \beta)(\frac{X}{\varepsilon}) + o(1)$$

et $(\partial_x \beta)(\frac{X}{\varepsilon})$ tend vers 0 (faiblement, p.s.)

On vérifie ainsi qu'à l'ordre principal, si $s_1(0, X)$ est régulier alors

$$\mathsf{E} \int_0^t s_1^2(\sigma, x) d\sigma \leq C, \quad \text{pour} \quad t = \mathcal{O}(1)$$

Equations de KdV à coefficients aléatoires :

$$r = \partial_X R \quad \rightsquigarrow \quad \partial_t R = -\Big(\sqrt{gh_\varepsilon(X)}\partial_X R + \varepsilon^2 (c_1 \partial_X^3 R + \frac{3}{2} c_2 (\partial_X R)^2)\Big)$$

Changement de coordonnées : caractéristiques régularisées

$$\begin{cases} \dfrac{dX^\varepsilon}{dt} = c^\varepsilon(X) = \sqrt{gh_\varepsilon(X)} \sim \sqrt{gh}\Big(1 - \dfrac{\varepsilon}{2h}\beta(\dfrac{X^\varepsilon}{\varepsilon}) - \dfrac{\varepsilon^2 a}{2h} - \dfrac{\varepsilon^2}{8h^2}\beta^2(\dfrac{X^\varepsilon}{\varepsilon})\Big) \\ X^\varepsilon(0) = Y \end{cases}$$

alors

$$X^\varepsilon(t, Y) = X^0(t) + \varepsilon X^1(t) + \varepsilon^2 X^2(t) + o(\varepsilon^2)$$

où

$$X^0(0) = Y, \quad X^j(0) = 0, \quad \forall j \geq 1$$

A l'ordre 0 :

$$X^0(t) = Y + \sqrt{gh}\, t$$

En utilisant la stationnarité de β, on obtient finalement

$$X^\varepsilon(t,Y) = Y + \sqrt{gh}\, t - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2h}\sigma_\beta (gh)^{1/4} B_\omega(t) - \varepsilon^2 \alpha t + o(\varepsilon^2)$$

où

$$\alpha = \sqrt{g}h\Big(\frac{a}{2} + \frac{1}{8h}\mathsf{E}(\beta)^2\Big)$$

Remarque : Cette expression de $X^\varepsilon(t,Y)$ est à comprendre "en loi" (dépendance en Y de la réalisation de $B_{\omega(Y)}(t)$); néanmoins, $\frac{dX^\varepsilon}{dY} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon)$ et le changement de variable est justifié à ω fixé.

On obtient pour r l'expression :

$$r(t,X) = q(\varepsilon^2 t, X - \sqrt{gh}t + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2h}\sigma_\beta (gh)^{1/4} B_\omega(t) + \varepsilon\alpha^2 t)$$

où q est solution de l'équation de KdV :

$$\partial_t q = c_1 \partial_Y^3 q + 3c_2\; q\partial_Y q$$

$\rightsquigarrow$ r vérifie l'équation de "Korteweg-de Vries-Burgers" stochastique :

$$\begin{aligned} \partial_t r + \sqrt{gh}\partial_X r &= \varepsilon^2 (c_1 \partial_X^3 r + 3c_2\, r\partial_X r - \alpha \partial_X r) \\ &\quad + \frac{1}{2}\varepsilon\gamma^2 \partial_X^2 r + \sqrt{\varepsilon}\gamma(\partial_X r)\frac{dB_\omega}{dt} \end{aligned}$$

où

$$\alpha = \sqrt{\frac{g}{h}}\Big(\frac{a}{2} + \frac{1}{8h}\mathsf{E}(\beta)^2\Big) \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{2h}\sigma_\beta (gh)^{1/4}$$

Cas particulier : si $r(0,x) = \varphi_c(X)$ est une onde solitaire alors

$$r(t,X) = \varphi_c(X - \sqrt{gh}t - c\varepsilon^2 t - \varepsilon^2 \alpha t + \sqrt{\varepsilon}\gamma B_\omega(t))$$

et

$$\max_{X\in\mathsf{R}} \mathsf{E}(r(t,X)) \leq \frac{\sqrt{2}h}{\sigma_\beta (gh)^{1/4}\sqrt{\varepsilon t}} |\varphi_c|_{L^1}$$

Conclusion

Si initialement bien préparées, u et η se decomposent en deux ondes :

• Une onde régulière r se propageant vers la droite avec une vitesse égale à $\sqrt{gh}$ au premier ordre, modifiée à l'ordre suivant par un bruit blanc, et qui est diffusée en moyenne

• Une onde s se propageant vers la gauche, à la vitesse $-\sqrt{gh}$ au premier ordre, fortement stochastique et vérifiant à l'ordre principal

$$\mathsf{E} \int_0^t s^2(\sigma, x) d\sigma \leq \varepsilon^3 C$$

pour des temps d'ordre un

Problèmes ouverts

• Description plus précise de la composante s_1 (backscattering)

Au premier ordre : s_1 très irrégulier, mais à moyenne nulle.
Peut-on conserver cette propriété à l'ordre suivant ?

• Dérivations d'autres systèmes de type Boussinesq (non hamiltoniens) auxquels on puisse donner une sens...

• Cas multi-échelle (en cours) : $\beta\left(\frac{X}{\varepsilon}, \varepsilon^\alpha X\right)$

$\alpha > 1/2 \quad \rightsquigarrow \quad$ pas d'influence sur la dérivation précédente

• Ondes $2 - D$: variations transverses seulement sur des échelles plus longues que la longueur d'onde transverse ?