

Quelques résultats mathématiques sur les modèles d'atomes relativistes dans des
champs magnétiques intenses

Maria J. ESTEBAN

C.N.R.S. et Université Paris-Dauphine

En collaboration avec : Jean Dolbeault et Michael Loss

<http://www.ceremade.dauphine.fr/~esteban/>

Problématique physique

Des champs magnétiques ultra forts pourraient :

- déstabiliser la matière, créant des distorsions des atomes et molécules pour former des chaînes de type polymères,
- faciliter l'apparition spontanée de paires électron-positron,
- favoriser d'autres phénomènes bizarres au niveau de la physique des photons,
- les meilleurs candidats pour héberger de tels phénomènes sont les magnétars (étoiles à neutrons), dans lesquelles des effondrements gravitationnels énormes faciliteraient l'apparition de champs magnétiques super intenses.
- les magnétars sont devenus l'hypothèse la plus plausible pour l'explication des phénomènes (observés) des "sursauts gamma" et des pulsars anormaux de rayons X.

Problématique physique

Des champs magnétiques ultra forts pourraient :

- déstabiliser la matière, créant des distorsions des atomes et molécules pour former des chaînes de type polymères,
- faciliter l'apparition spontanée de paires électron-positron,
- favoriser d'autres phénomènes bizarres au niveau de la physique des photons,
- les meilleurs candidats pour héberger de tels phénomènes sont les magnétars (étoiles à neutrons), dans lesquelles des collapsés gravitationnels énormes faciliteraient l'apparition de champs magnétiques super intenses.
- les magnétars sont devenus l'hypothèse la plus plausible pour l'explication des phénomènes (observés) des "sursauts gamma" et des pulsars anormaux de rayons X.

Champ magnétique terrestre = 1 Gauss

Champs maximum possible (RMI) = 1 Tesla = 10^4 Gauss

Champs mortel = 10^5 Tesla = 10^9 Gauss

Champs qu'on pense possibles dans les magnétars en formation = 10^{11} Tesla. Dans des théories récentes, cela va jusqu'à 10^{16} dans le coeur.

Y a-t-il des modèles qui permettent de prévoir de tels phénomènes physiques dans un magnétar?

- modèles d'électrons relativistes (Dirac) avec des champs magnétiques homogènes et moments magnétiques anormaux (V. Canuto, H.-Y. Chiu; R.F. O'Connell),
- atomes hydrogénoïdes dans un univers courbé (Nowotny),
- champs électrostatiques intenses (... , Brodsky, Mohr,...),
- champs magnétiques hétérogènes (P. Achuthan et al),

Excellente synthèse dans les travaux de R.C. Duncan et C. Thompson.

Y a-t-il des modèles qui permettent de prévoir de tels phénomènes physiques dans un magnétar?

- modèles d'électrons relativistes (Dirac) avec des champs magnétiques homogènes et moments magnétiques anormaux (V. Canuto, H.-Y. Chiu; R.F. O'Connell),
- atomes hydrogénoïdes dans un univers courbé (Nowotny),
- champs électrostatiques intenses (... , Brodsky, Mohr,...),
- champs magnétiques hétérogènes (P. Achuthan et al),

Excellente synthèse dans les travaux de R.C. Duncan et C. Thompson.

- cas d'un champ électrostatique et un champ magnétique homogène.

Y a-t-il des modèles qui permettent de prévoir de tels phénomènes physiques dans un magnétar?

- modèles d'électrons relativistes (Dirac) avec des champs magnétiques homogènes et moments magnétiques anormaux (V. Canuto, H.-Y. Chiu; R.F. O'Connell),
- atomes hydrogénoïdes dans un univers courbé (Nowotny),
- champs électrostatiques intenses (... , Brodsky, Mohr,...),
- champs magnétiques hétérogènes (P. Achuthan et al),

Excellente synthèse dans les travaux de R.C. Duncan et C. Thompson.

- cas d'un champ électrostatique et un champ magnétique homogène.

Très différente physique et très différentes mathématiques dans les travaux de Lieb, Solovej, Ingvasson.

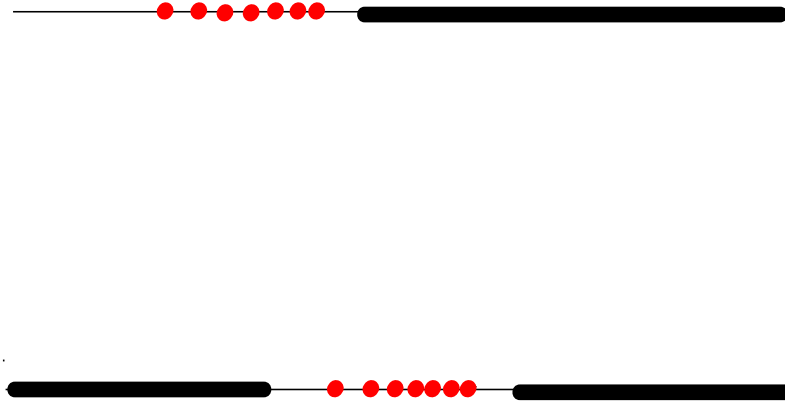
Valeurs propres en dessous / au milieu du spectre continu.

Spectre d'un opérateur auto-adjoint A :



Valeurs propres en dessous / au milieu du spectre continu.

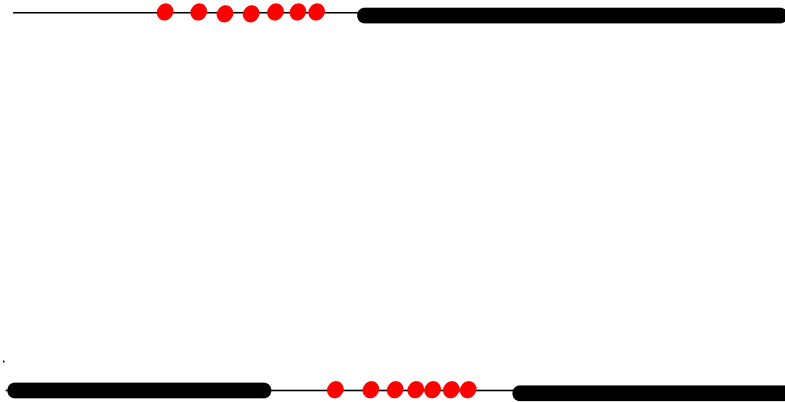
Spectre d'un opérateur auto-adjoint A :



Dans le premier cas, $\lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}$

Valeurs propres en dessous / au milieu du spectre continu.

Spectre d'un opérateur auto-adjoint A :

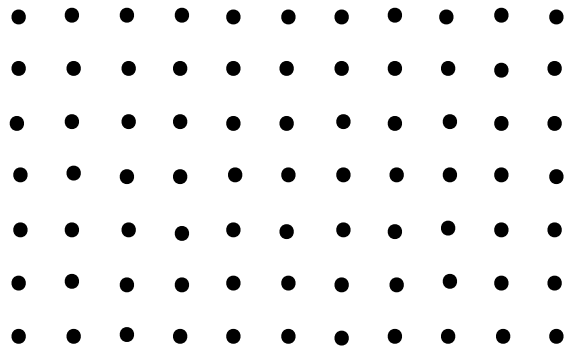


Dans le premier cas, $\lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}$

Dans le deuxième cas, $\lambda_1 = \min \max \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}$, $\lambda_1 = \max \min \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}$, ...

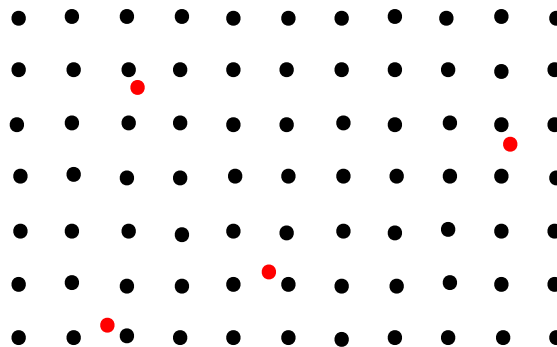
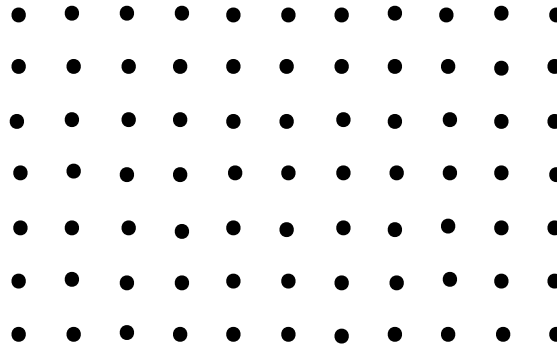
Exemples de trous spectraux : potentiels périodiques

Hamiltonien : $-\Delta + p(x)$, p périodique :



Exemples de trous spectraux : potentiels périodiques

Hamiltonien : $-\Delta + p(x)$, p périodique :



L'Hamiltonien de Dirac libre

$$\mathbf{H} = -\mathbf{i} \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{C}) \quad (c = m = \hbar = 1)$$

L'Hamiltonien de Dirac libre

$$\mathbf{H} = -\mathbf{i} \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{C}) \quad (c = m = \hbar = 1)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3)$$

L'Hamiltonien de Dirac libre

$$\mathbf{H} = -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{C}) \quad (c = m = \hbar = 1)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'Hamiltonien de Dirac libre

$$\mathbf{H} = -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{C}) \quad (c = m = \hbar = 1)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les deux propriétés principales de H sont:

$$\mathbf{H}^2 = -\Delta + \mathbb{1}, \quad \sigma(H) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

L'Hamiltonien de Dirac libre

$$\mathbf{H} = -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{C}) \quad (c = m = \hbar = 1)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les deux propriétés principales de H sont:

$$\mathbf{H}^2 = -\Delta + \mathbb{1}, \quad \sigma(H) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Remarque. \mathbf{H} acts on functions $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$

L'Hamiltonien de Dirac libre

$$\mathbf{H} = -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{C}) \quad (c = m = \hbar = 1)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les deux propriétés principales de H sont:

$$\mathbf{H}^2 = -\Delta + \mathbb{1}, \quad \sigma(H) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Remarque. \mathbf{H} acts on functions $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$

QUESTION : Spectre de $\mathbf{H} + V$?

Valeurs propres d'opérateurs de Dirac

Considérons d'abord le cas des potentiels de Coulomb $V_\nu := -\frac{\nu}{|x|}$, $\nu > 0$.

Valeurs propres d'opérateurs de Dirac

Considérons d'abord le cas des potentiels de Coulomb $V_\nu := -\frac{\nu}{|x|}$, $\nu > 0$.

$H_\nu := H_0 - \frac{\nu}{|x|}$ peut être défini comme un opérateur auto-adjoint et se "comporte bien" ssi $0 < \nu < 1$.

Valeurs propres d'opérateurs de Dirac

Considérons d'abord le cas des potentiels de Coulomb $V_\nu := -\frac{\nu}{|x|}$, $\nu > 0$.

$H_\nu := H_0 - \frac{\nu}{|x|}$ peut être défini comme un opérateur auto-adjoint et se "comporte bien" ssi $0 < \nu < 1$.

Son spectre est donné par :

$$\sigma(H_\nu) = (-\infty, -1] \cup \{\lambda_1^\nu, \lambda_2^\nu, \dots\} \cup [1, \infty)$$

$$0 < \lambda_1^\nu = \sqrt{1 - \nu^2} \leq \dots \leq \lambda_k^\nu \dots < 1 .$$

et le fait que $\lambda_1(H + V_\nu)$ appartienne à $(-1, 1)$ est une sorte de condition suffisante de "stabilité électronique".

Cas magnétique I

et un potentiel associé \mathbf{A}_B t. q. $\text{curl } \mathbf{A}_B = \mathbf{B}$.

Cas magnétique I

et un potentiel associé \mathbf{A}_B t. q. $\text{curl } \mathbf{A}_B = \mathbf{B}$.

On doit alors remplacerr ∇ par $\nabla_B = \nabla - i\mathbf{A}_B$

Cas magnétique I

et un potentiel associé \mathbf{A}_B t. q. $\text{curl } \mathbf{A}_B = \mathbf{B}$.

On doit alors remplacerr ∇ par $\nabla_B = \nabla - i\mathbf{A}_B$

$$\mathbf{H}_B = -i\alpha \cdot \nabla_B + \beta$$

Cas magnétique I

et un potentiel associé \mathbf{A}_B t. q. $\text{curl } \mathbf{A}_B = \mathbf{B}$.

On doit alors remplacerr ∇ par $\nabla_B = \nabla - i\mathbf{A}_B$

$$\mathbf{H}_B = -i\alpha \cdot \nabla_B + \beta$$

Si nous considérons $H_B + V$, si cet opérateur est auto-adjoint, si son spectre est l'union des intervalles

$$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

plus une suite de valeurs propres dans le trou spectral $(-1, 1)$,

Cas magnétique I

et un potentiel associé \mathbf{A}_B t. q. $\text{curl } \mathbf{A}_B = \mathbf{B}$.

On doit alors remplacerr ∇ par $\nabla_B = \nabla - i\mathbf{A}_B$

$$\mathbf{H}_B = -i\alpha \cdot \nabla_B + \beta$$

Si nous considérons $H_B + V$, si cet opérateur est auto-adjoint, si son spectre est l'union des intervalles

$$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

plus une suite de valeurs propres dans le trou spectral $(-1, 1)$,

Est-ce que $\lambda_1(B, V)$ quitte le trou spectral $(-1, 1)$? et si oui, pour quelles valeurs de B ?

Théorème de min-max abstrait (Dolbeault, E., Séré, 2000)

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $A : F = D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur auto-adjoint défini sur \mathcal{H} . Soient $\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-$ deux sous-espaces de Hilbert orthogonaux de \mathcal{H} :
 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$. Définissons $F_{\pm} := P_{\pm}F$.

Théorème de min-max abstrait (Dolbeault, E., Séré, 2000)

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $A : F = D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur auto-adjoint défini sur \mathcal{H} . Soient $\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-$ deux sous-espaces de Hilbert orthogonaux de \mathcal{H} :

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$. Définissons $F_{\pm} := P_{\pm}F$.

$$(i) \quad a_- := \sup_{x_- \in F_- \setminus \{0\}} \frac{(x_-, Ax_-)}{\|x_-\|_{\mathcal{H}}^2} < +\infty.$$

Théorème de min-max abstrait (Dolbeault, E., Séré, 2000)

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $A : F = D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur auto-adjoint défini sur \mathcal{H} . Soient $\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-$ deux sous-espaces de Hilbert orthogonaux de \mathcal{H} :

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$. Définissons $F_{\pm} := P_{\pm}F$.

$$(i) \quad a_- := \sup_{x_- \in F_- \setminus \{0\}} \frac{(x_-, Ax_-)}{\|x_-\|_{\mathcal{H}}^2} < +\infty.$$

$$\text{Soit } c_k = \inf_{\substack{V \text{ subspace of } F_+ \\ \dim V = k}} \sup_{x \in (V \oplus F_-) \setminus \{0\}} \frac{(x, Ax)}{\|x\|_{\mathcal{H}}^2}, \quad k \geq 1.$$

Théorème de min-max abstrait (Dolbeault, E., Séré, 2000)

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $A : F = D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur auto-adjoint défini sur \mathcal{H} . Soient $\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-$ deux sous-espaces de Hilbert orthogonaux de \mathcal{H} :

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$. Définissons $F_{\pm} := P_{\pm}F$.

$$(i) \quad a_- := \sup_{x_- \in F_- \setminus \{0\}} \frac{(x_-, Ax_-)}{\|x_-\|_{\mathcal{H}}^2} < +\infty.$$

$$\text{Soit } c_k = \inf_{\substack{V \text{ subspace of } F_+ \\ \dim V = k}} \sup_{x \in (V \oplus F_-) \setminus \{0\}} \frac{(x, Ax)}{\|x\|_{\mathcal{H}}^2}, \quad k \geq 1.$$

Si (ii) $c_1 > a_-$, alors c_k est la valeur propre k -ième de A dans l'intervalle (a_-, b) , où $b = \inf (\sigma_{\text{ess}}(A) \cap (a_-, +\infty))$.

Application aux opérateurs de Dirac I

$$\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4, \quad \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \varphi, \chi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

Application aux opérateurs de Dirac I

$$\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4, \quad \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \varphi, \chi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

Supposons que V satisfait

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = 0, \quad -\frac{\nu}{|x|} \leq V \leq 0,$$

Application aux opérateurs de Dirac I

$$\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4, \quad \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \varphi, \chi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

Supposons que V satisfait

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = 0, \quad -\frac{\nu}{|x|} \leq V \leq 0,$$

Alors, pour tout $k \geq 1$,

$$\lambda_k(V) = \inf_{\substack{Y \text{ sous-espace de } C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \\ \dim Y = k}} \sup_{\varphi \in Y \setminus \{0\}} \sup_{\substack{\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \\ \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}} \frac{(\psi, (H + V)\psi)}{(\psi, \psi)}$$

Application aux opérateurs de Dirac II

En particulier, la première valeur propre de $H + V$ dans le trou spectral $(-1, 1)$ est donnée par

$$\lambda_1(V) := \inf_{\varphi \neq 0} \sup_{\chi} \frac{(\psi, (H + V)\psi)}{(\psi, \psi)}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

Application aux opérateurs de Dirac II

En particulier, la première valeur propre de $H + V$ dans le trou spectral $(-1, 1)$ est donnée par

$$\lambda_1(V) := \inf_{\varphi \neq 0} \sup_{\chi} \frac{(\psi, (H + V)\psi)}{(\psi, \psi)}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

et

$$\lambda(\varphi) := \sup_{\substack{\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \\ \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}} \frac{(\psi, (H + V)\psi)}{(\psi, \psi)}$$

Application aux opérateurs de Dirac II

En particulier, la première valeur propre de $H + V$ dans le trou spectral $(-1, 1)$ est donnée par

$$\lambda_1(V) := \inf_{\varphi \neq 0} \sup_{\chi} \frac{(\psi, (H + V)\psi)}{(\psi, \psi)}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

et

$$\lambda(\varphi) := \sup_{\substack{\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \\ \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}} \frac{(\psi, (H + V)\psi)}{(\psi, \psi)}$$

est l'unique nombre réel λ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla \varphi|^2}{1 - V + \lambda} + (1 + V)|\varphi|^2 \right) dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^2 dx .$$

$$\lambda_1(V) = \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \\ \varphi \neq 0}} \lambda(\varphi)$$

$$\lambda_1(V) = \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \\ \varphi \neq 0}} \lambda(\varphi)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla \varphi|^2}{1 - V + \lambda(\varphi)} + (1 + V)|\varphi|^2 \right) dx = \lambda(\varphi) \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^2 dx$$

$$\lambda_1(V) = \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \\ \varphi \neq 0}} \lambda(\varphi)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla \varphi|^2}{1 - V + \lambda(\varphi)} + (1 + V)|\varphi|^2 \right) dx = \lambda(\varphi) \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^2 dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla \varphi|^2}{1 - V + \lambda_1(V)} + (1 + V)|\varphi|^2 \right) dx \geq \lambda_1(V) \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^2 dx$$

et $\lambda_1(V)$ est la constante optimale dans l'inégalité ci-dessus.

$$\lambda_1(V) = \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \\ \varphi \neq 0}} \lambda(\varphi)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla \varphi|^2}{1 - V + \lambda(\varphi)} + (1 + V)|\varphi|^2 \right) dx = \lambda(\varphi) \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^2 dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla \varphi|^2}{1 - V + \lambda_1(V)} + (1 + V)|\varphi|^2 \right) dx \geq \lambda_1(V) \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^2 dx$$

et $\lambda_1(V)$ est la constante optimale dans l'inégalité ci-dessus.

Conséquences :

- Algorithmes robustes et faciles d'implémentation.

$$\lambda_1(V) = \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \\ \varphi \neq 0}} \lambda(\varphi)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla \varphi|^2}{1 - V + \lambda(\varphi)} + (1 + V)|\varphi|^2 \right) dx = \lambda(\varphi) \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^2 dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla \varphi|^2}{1 - V + \lambda_1(V)} + (1 + V)|\varphi|^2 \right) dx \geq \lambda_1(V) \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^2 dx$$

et $\lambda_1(V)$ est la constante optimale dans l'inégalité ci-dessus.

Conséquences :

- Algorithmes robustes et faciles d'implémentation.
- Une nouvelle classe d'inégalités de type Hardy pour l'opérateur de Dirac.

$$\lambda_1(V) = \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \\ \varphi \neq 0}} \lambda(\varphi)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla \varphi|^2}{1 - V + \lambda(\varphi)} + (1 + V)|\varphi|^2 \right) dx = \lambda(\varphi) \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^2 dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla \varphi|^2}{1 - V + \lambda_1(V)} + (1 + V)|\varphi|^2 \right) dx \geq \lambda_1(V) \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^2 dx$$

et $\lambda_1(V)$ est la constante optimale dans l'inégalité ci-dessus.

Conséquences :

- Algorithmes robustes et faciles d'implémentation.
- Une nouvelle classe d'inégalités de type Hardy pour l'opérateur de Dirac.
- Estimations assez précises pour le cas magnétique.

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla \varphi|^2}{\lambda(\varphi) + 1 - V} + (V + 1 - \lambda(\varphi)) |\varphi|^2 \right) dx = 0.$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla \varphi|^2}{\lambda(\varphi) + 1 - V} + (V + 1 - \lambda(\varphi)) |\varphi|^2 \right) dx = 0.$$

Soit $A(\lambda)$ l'opérateur défini par la forme quadratique et qui agit sur les 2-spineurs:

$$(\varphi, A(\lambda)\varphi) := \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla \varphi|^2}{\lambda + 1 - V} + (V + 1 - \lambda) |\varphi|^2 \right) dx$$

et considérons sa plus petite valeur propre, $\mu_1(\lambda)$.

Vers un algorithme simple

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla \varphi|^2}{\lambda(\varphi) + 1 - V} + (V + 1 - \lambda(\varphi)) |\varphi|^2 \right) dx = 0.$$

Soit $A(\lambda)$ l'opérateur défini par la forme quadratique et qui agit sur les 2-spineurs:

$$(\varphi, A(\lambda)\varphi) := \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla \varphi|^2}{\lambda + 1 - V} + (V + 1 - \lambda) |\varphi|^2 \right) dx$$

et considérons sa plus petite valeur propre, $\mu_1(\lambda)$.

Grâce à la **monotonie** de $A(\lambda)$ par rapport à λ , il existe un λ **unique** tel que $\mu_1(\lambda) = 0$.

Ce λ est en fait la première valeur propre de A dans le trou spectral $(-1, 1)$.

Inégalités de Hardy pour les opérateurs de Dirac

Ici la singularité "maximale" est $\frac{1}{|x|}$.

Inégalités de Hardy pour les opérateurs de Dirac

Ici la singularité "maximale" est $\frac{1}{|x|}$.

L'inégalité optimale est :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi|^2}{1 + \frac{1}{|x|}} + |\varphi|^2 \right) dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi|^2}{|x|} dx, \quad \text{pour tout } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2).$$

Inégalités de Hardy pour les opérateurs de Dirac

Ici la singularité "maximale" est $\frac{1}{|x|}$.

L'inégalité optimale est :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi|^2}{1 + \frac{1}{|x|}} + |\varphi|^2 \right) dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi|^2}{|x|} dx, \quad \text{pour tout } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2).$$

On sait que pour $V_\nu = -\frac{\nu}{|x|}$, $\nu \in (0, 1)$, $\lambda_1(\nu/|x|) = \sqrt{1 - \nu^2}$. D'où,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi|^2}{1 + \sqrt{1 - \nu^2} + \frac{\nu}{|x|}} + \left(1 - \sqrt{1 - \nu^2}\right) |\varphi|^2 \right) dx \geq \nu \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi|^2}{|x|} dx.$$

Some comments on Hardy-like inequalities for Dirac

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi|^2}{1 + \sqrt{1 - \nu^2} + \frac{\nu}{|x|}} + \left(1 - \sqrt{1 - \nu^2}\right) |\varphi|^2 \right) dx \geq \nu \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi|^2}{|x|} dx, \quad \nu \in (0, 1).$$

Some comments on Hardy-like inequalities for Dirac

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi|^2}{1 + \sqrt{1 - \nu^2} + \frac{\nu}{|x|}} + (1 - \sqrt{1 - \nu^2}) |\varphi|^2 \right) dx \geq \nu \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi|^2}{|x|} dx, \quad \nu \in (0, 1).$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi|^2}{1 + \frac{1}{|x|}} + |\varphi|^2 \right) dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi|^2}{|x|} dx, \quad \text{for all } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2).$$

Some comments on Hardy-like inequalities for Dirac

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi|^2}{1 + \sqrt{1 - \nu^2} + \frac{\nu}{|x|}} + (1 - \sqrt{1 - \nu^2}) |\varphi|^2 \right) dx \geq \nu \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi|^2}{|x|} dx, \quad \nu \in (0, 1).$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi|^2}{1 + \frac{1}{|x|}} + |\varphi|^2 \right) dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi|^2}{|x|} dx, \quad \text{for all } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2).$$

If we replace $\varphi(\cdot)$ by $\varepsilon^{-1}\varphi(\varepsilon^{-1}\cdot)$ and take the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$, we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^3} |x| |\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi|^2}{|x|} dx, \quad \text{for all } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2).$$

Some comments on Hardy-like inequalities for Dirac

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi|^2}{1 + \sqrt{1 - \nu^2} + \frac{\nu}{|x|}} + (1 - \sqrt{1 - \nu^2}) |\varphi|^2 \right) dx \geq \nu \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi|^2}{|x|} dx, \quad \nu \in (0, 1).$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi|^2}{1 + \frac{1}{|x|}} + |\varphi|^2 \right) dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi|^2}{|x|} dx, \quad \text{for all } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2).$$

If we replace $\varphi(\cdot)$ by $\varepsilon^{-1}\varphi(\varepsilon^{-1}\cdot)$ and take the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$, we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^3} |x| |\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi|^2}{|x|} dx, \quad \text{for all } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2).$$

By taking $\varphi = (f, 0)$ with f purely real, we end up with

$$\int_{\mathbb{R}^3} |x| |\nabla f|^2 \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f|^2}{|x|}, \quad \text{for all } f \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}),$$

which is itself equivalent to

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx \quad \text{for all } u \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}).$$

$$\lambda_1(B, V) = \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \\ \varphi \neq 0}} \lambda^B(\varphi)$$

$$\lambda_1(B, V) = \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \\ \varphi \neq 0}} \lambda^B(\varphi)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla_B \varphi|^2}{1 - V + \lambda^B(\varphi)} + (V + 1 - \lambda^B(\varphi)) |\varphi|^2 \right) dx = 0$$

Cas magnétique II

$$\lambda_1(B, V) = \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \\ \varphi \neq 0}} \lambda^B(\varphi)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla_B \varphi|^2}{1 - V + \lambda^B(\varphi)} + (V + 1 - \lambda^B(\varphi)) |\varphi|^2 \right) dx = 0$$

QUESTIONS : Quand avons-nous $\lambda_1(B, V) \in (-1, 1)$?

Cas magnétique II

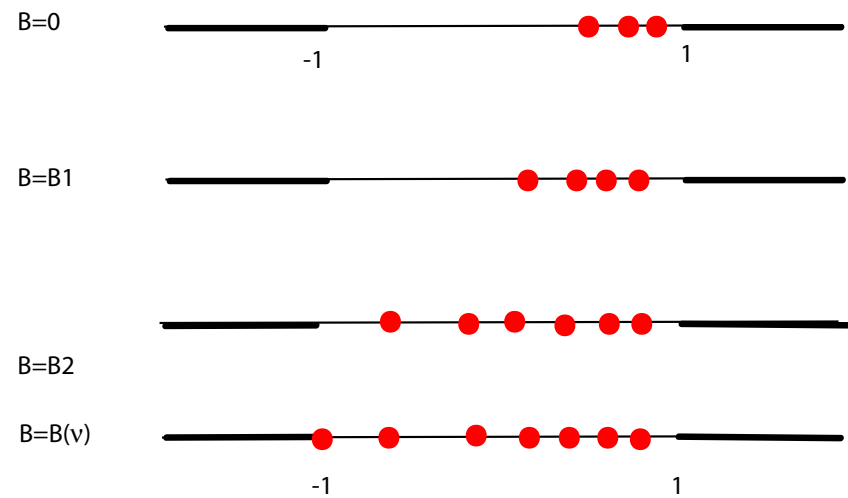
$$\lambda_1(B, V) = \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \\ \varphi \neq 0}} \lambda^B(\varphi)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\sigma \cdot \nabla_B \varphi|^2}{1 - V + \lambda^B(\varphi)} + (V + 1 - \lambda^B(\varphi)) |\varphi|^2 \right) dx = 0$$

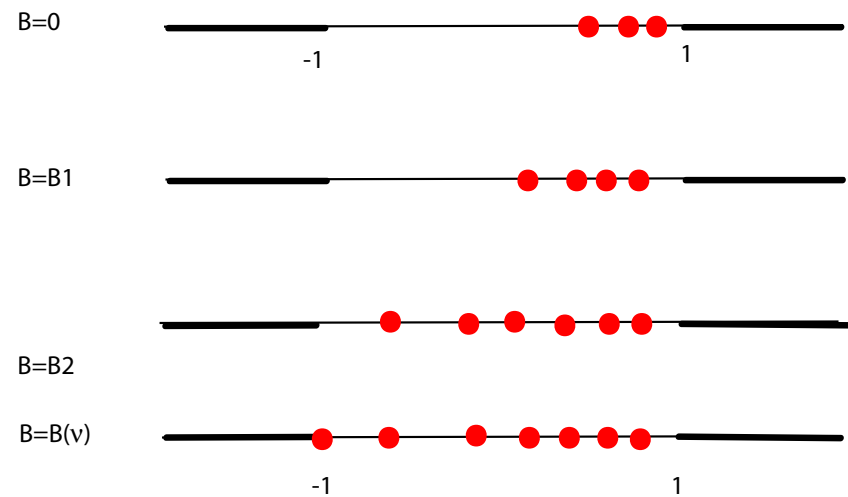
QUESTIONS : Quand avons-nous $\lambda_1(B, V) \in (-1, 1)$?

Quand est-ce que la valeur propre $\lambda_1(B, V)$ quitte $(-1, 1)$, si elle le fait?

Pour un $\nu \in (0, 1)$ donné, $0 < B1 < B2 < B(\nu)$:



Pour un $\nu \in (0, 1)$ donné, $0 < B_1 < B_2 < B(\nu)$:



OUTIL :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|(\sigma \cdot \nabla_B) \varphi|^2}{1 + \lambda_1(B, V) - V} dx + (1 - \lambda_1(B, V)) \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} V |\varphi|^2 dx$$

Estimations pour λ_1

Pour un \bar{C} donné, on démontre $\lambda_1(B, V) < \bar{C}$ si on exhibe une fonction $\bar{\varphi}$ t. q.

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|(\sigma \cdot \nabla_B) \bar{\varphi}|^2}{1 + \bar{C} - V} dx + (1 - \bar{C}) \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\varphi}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V |\bar{\varphi}|^2 dx < 0$$

Estimations pour λ_1

Pour un \overline{C} donné, on démontre $\lambda_1(B, V) < \overline{C}$ si on exhibe une fonction $\bar{\varphi}$ t. q.

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|(\sigma \cdot \nabla_B) \bar{\varphi}|^2}{1 + \overline{C} - V} dx + (1 - \overline{C}) \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\varphi}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V |\bar{\varphi}|^2 dx < 0$$

Et pour vérifier que $\lambda_1(B, V) > \underline{C}$ il suffit de démontrer que pour tout φ

$$(**) \quad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|(\sigma \cdot \nabla_B) \varphi|^2}{1 + \underline{C} - V} dx + (1 - \underline{C}) \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V |\varphi|^2 dx > 0$$

Estimations pour λ_1

Pour un \overline{C} donné, on démontre $\lambda_1(B, V) < \overline{C}$ si on exhibe une fonction $\bar{\varphi}$ t. q.

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|(\sigma \cdot \nabla_B) \bar{\varphi}|^2}{1 + \overline{C} - V} dx + (1 - \overline{C}) \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\varphi}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V |\bar{\varphi}|^2 dx < 0$$

Et pour vérifier que $\lambda_1(B, V) > \underline{C}$ il suffit de démontrer que pour tout φ

$$(**) \quad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|(\sigma \cdot \nabla_B) \varphi|^2}{1 + \underline{C} - V} dx + (1 - \underline{C}) \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V |\varphi|^2 dx > 0$$

et nous sommes bien-entendu intéressés par le cas $\overline{C} = 1$ dans (*), et $\underline{C} = -1$ dans (**).

Quelques résultats (avec J. Dolbeault et M. Loss)

$$V_\nu = -\frac{\nu}{|x|}, \quad \mathbf{A}_B(x) := \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}; \quad \nu \in (0, 1), \quad B \geq 0$$

Quelques résultats (avec J. Dolbeault et M. Loss)

$$V_\nu = -\frac{\nu}{|x|}, \quad \mathbf{A}_B(x) := \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}; \quad \nu \in (0, 1), \quad B \geq 0$$

- Pour $B = 0$, $\lambda_1(0, V_\nu) = \sqrt{1 - \nu^2} \in (-1, 1)$

Quelques résultats (avec J. Dolbeault et M. Loss)

$$V_\nu = -\frac{\nu}{|x|}, \quad \mathbf{A}_B(x) := \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}; \quad \nu \in (0, 1), \quad B \geq 0$$

- Pour $B = 0$, $\lambda_1(0, V_\nu) = \sqrt{1 - \nu^2} \in (-1, 1)$
- Pour tout $B \geq 0$, $\lambda_1(B, V_\nu) < 1$

Quelques résultats (avec J. Dolbeault et M. Loss)

$$V_\nu = -\frac{\nu}{|x|}, \quad \mathbf{A}_B(x) := \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}; \quad \nu \in (0, 1), \quad B \geq 0$$

- Pour $B = 0$, $\lambda_1(0, V_\nu) = \sqrt{1 - \nu^2} \in (-1, 1)$
- Pour tout $B \geq 0$, $\lambda_1(B, V_\nu) < 1$
- Pour tout $\nu \in (0, 1)$ il existe un champ magnétique limite B_ν tel que

$$\lambda_1(B, V_\nu) \leq -1 \quad \text{if} \quad B \geq B_\nu$$

Quelques résultats (avec J. Dolbeault et M. Loss)

$$V_\nu = -\frac{\nu}{|x|}, \quad \mathbf{A}_B(x) := \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}; \quad \nu \in (0, 1), \quad B \geq 0$$

- Pour $B = 0$, $\lambda_1(0, V_\nu) = \sqrt{1 - \nu^2} \in (-1, 1)$
- Pour tout $B \geq 0$, $\lambda_1(B, V_\nu) < 1$
- Pour tout $\nu \in (0, 1)$ il existe un champ magnétique limite B_ν tel que

$$\lambda_1(B, V_\nu) \leq -1 \quad \text{if} \quad B \geq B_\nu$$

- $\lim_{\nu \rightarrow 1} B_\nu > 0$, $\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \log B_\nu = \pi$

Quelques résultats (avec J. Dolbeault et M. Loss)

$$V_\nu = -\frac{\nu}{|x|}, \quad \mathbf{A}_B(x) := \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}; \quad \nu \in (0, 1), \quad B \geq 0$$

- Pour $B = 0$, $\lambda_1(0, V_\nu) = \sqrt{1 - \nu^2} \in (-1, 1)$
- Pour tout $B \geq 0$, $\lambda_1(B, V_\nu) < 1$
- Pour tout $\nu \in (0, 1)$ il existe un champ magnétique limite B_ν tel que

$$\lambda_1(B, V_\nu) \leq -1 \quad \text{if} \quad B \geq B_\nu$$

- $\lim_{\nu \rightarrow 1} B_\nu > 0$, $\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \log B_\nu = \pi$
- Pour ν petit, l'asymptotique pour B_ν est donnée par un problème simple qui correspond au niveau de Landau **relativiste**.

Pour prouver l'asymptotique $\nu \sim 0^+$, nous définissons le problème suivant :

Pour prouver l'asymptotique $\nu \sim 0^+$, nous définissons le problème suivant :

$$c_0(B, \nu) := \inf_{\substack{\varphi \in X_0 \\ \varphi \neq 0}} \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}}} \frac{((H_B + V_\nu)\psi, \psi)}{\|\psi\|^2}$$

Pour prouver l'asymptotique $\nu \sim 0^+$, nous définissons le problème suivant :

$$c_0(B, \nu) := \inf_{\substack{\varphi \in X_0 \\ \varphi \neq 0}} \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}}} \frac{((H_B + V_\nu)\psi, \psi)}{\|\psi\|^2}$$

où X_0 est l'espace des fonctions au plus bas niveau de Landau :

$$\varphi \in X_0 \quad \text{iff} \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Bs^2}{4}} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x_3) \end{pmatrix}, \quad s^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Pour prouver l'asymptotique $\nu \sim 0^+$, nous définissons le problème suivant :

$$c_0(B, \nu) := \inf_{\substack{\varphi \in X_0 \\ \varphi \neq 0}} \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}}} \frac{((H_B + V_\nu)\psi, \psi)}{\|\psi\|^2}$$

où X_0 est l'espace des fonctions au plus bas niveau de Landau :

$$\varphi \in X_0 \quad \text{iff} \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Bs^2}{4}} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x_3) \end{pmatrix}, \quad s^2 = x_1^2 + x_2^2$$

et cela nous amène à devoir traiter un problème 1d.

$$c_0(B, \nu) = \inf_{f \in C_0^\infty(\mathbb{C}) \setminus \{0\}} \lambda_0^B(f),$$

où $\lambda_0^B(f)$ est défini par

$$\lambda_0^B(f) \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|^2 dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{|f'(z)|^2}{1 + \lambda_0^B(f) + \nu a_0^B(z)} + (1 - \nu a_0^B(z)) |f(z)|^2 \right) dz,$$

où a_0^B est un potentiel réduit :

$$a_0^B(z) = B \int_0^{+\infty} \frac{s e^{-\frac{Bs^2}{2}}}{\sqrt{s^2 + z^2}} ds.$$

("l'image sur le premier niveau de Landau du potentiel de Coulomb").

Résultat de comparaison

Pour tout $\nu \in (0, 1)$ tel que $\nu + \nu^{3/2} < 1$, il existe une constante $d_\nu > 0$ telle que pour tout $d_\nu \leq B < B_\nu$,

$$(*) \quad c_0(B, \nu + \nu^{3/2}) \leq \lambda_1(B, \nu) \leq c_0(B, \nu - \nu^{3/2})$$

et les problèmes c_0 sont tous les deux $1d$!

Résultat de comparaison

Pour tout $\nu \in (0, 1)$ tel que $\nu + \nu^{3/2} < 1$, il existe une constante $d_\nu > 0$ telle que pour tout $d_\nu \leq B < B_\nu$,

$$(*) \quad c_0(B, \nu + \nu^{3/2}) \leq \lambda_1(B, \nu) \leq c_0(B, \nu - \nu^{3/2})$$

et les problèmes c_0 sont tous les deux $1d$!

Puis, comme nous avons que pour $\nu \rightarrow 0^+$, $\nu^{3/2} \ll \nu$,

$$c_0(B, \nu + \nu^{3/2}) \sim c_0(B, \nu - \nu^{3/2})$$

Résultat de comparaison

Pour tout $\nu \in (0, 1)$ tel que $\nu + \nu^{3/2} < 1$, il existe une constante $d_\nu > 0$ telle que pour tout $d_\nu \leq B < B_\nu$,

$$(*) \quad c_0(B, \nu + \nu^{3/2}) \leq \lambda_1(B, \nu) \leq c_0(B, \nu - \nu^{3/2})$$

et les problèmes c_0 sont tous les deux $1d$!

Puis, comme nous avons que pour $\nu \rightarrow 0^+$, $\nu^{3/2} \ll \nu$,

$$c_0(B, \nu + \nu^{3/2}) \sim c_0(B, \nu - \nu^{3/2})$$

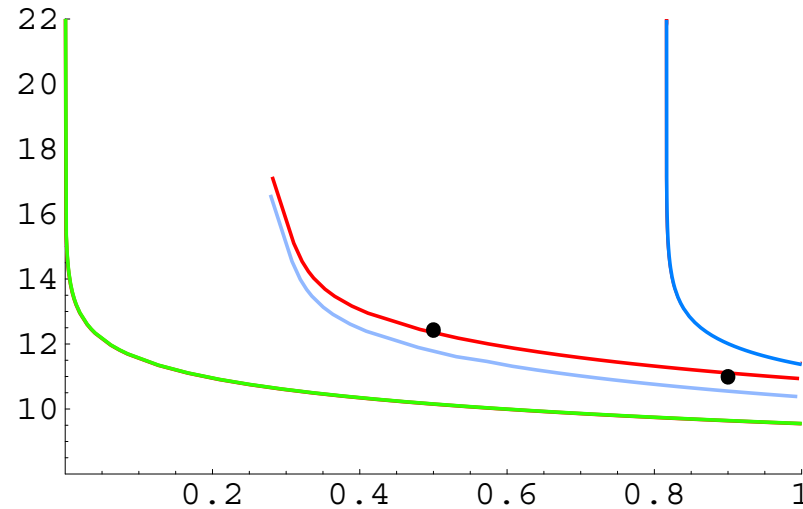
Et à partir de (*) nous trouvons :

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \log B_\nu = \pi$$

en cherchant le plus petit $B > 0$ tel que $c_0(B, \nu \pm \nu^{3/2}) = -1$.

Quelques résultats numériques préliminaires pour le cas magnétique

Comme toutes les valeurs plottées sont énormes, le dessin est fait en échelle logarithmique:



Estimation analytique par en bas de $\lambda_1(B, \nu)$.

g Estimation analytique par en haut de $\lambda_1(B, \nu)$.

Résultat numérique pour le problème correspondant au plus bas niveau de Landau relativiste, c-à-d. le problème $c_0(B_{LL}, \nu) = -1$.

POINTS NOIRS : Calculs numériques pour le problème 3d complet et pour $\nu = 0.5$ et 0.9.

Courbe bleue claire : la courbe exacte (inconnue). En cours de calcul numérique.

COMMENTAIRE. Avec le modèle du premier niveau de Landau (modèle 1*d*), supposant que dans la croûte d'un magnétar il y a des éléments pas trop lourds ($Z \leq 40$), pour voir l'apparition de paires électron-positron il faudrait qu'il y ait des intensités de champ de l'ordre de 10^{16} Tesla

COMMENTAIRE. Avec le modèle du premier niveau de Landau (modèle $1d$), supposant que dans la croûte d'un magnétar il y a des éléments pas trop lourds ($Z \leq 40$), pour voir l'apparition de paires électron-positron il faudrait qu'il y ait des intensités de champ de l'ordre de 10^{16} Tesla

CONCLUSION. Avec notre modèle très rudimentaire et simple,

– si des éléments plus lourds pouvaient être présents dans les magnétars,

– ou si l'énergie fondamentale était bien en dessous de celle du niveau $1d$,

alors on pourrait peut-être arriver à avoir un modèle de fermeture du trou spectral dans les conditions des magnétars.