Equation de Schrödinger non linéaire avec un défaut localisé

Reika Fukuizumi

Université de Paris Sud/ Hokkaido University (Japon)

(collaboration avec Stefan Le Coz (Besançon))

On étudie la stabilité et l'instabilité orbitale des ondes stationnaires

$$u_\omega(t,x) = e^{i\omega t}\phi(x)$$

de l'équation de Schrödinger non linéaire avec un potentiel de delta de Dirac:

$$\text{(NLS)} \qquad i\partial_t u = -\Delta u - \gamma\delta(x)u - |u|^{p-1}u,$$

où $\omega > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\Delta = \partial_x^2$, $p > 1$ et δ est la mesure de Dirac à l'origine. Pour que $u_\omega(t,x)$ vérifie (NLS), $\phi(x)$ doit être une solution de (SP):

$$\text{(SP)} \qquad -\Delta\phi + \omega\phi - \gamma\delta(x)\phi = |\phi|^{p-1}\phi, \quad \phi \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}.$$

La mesure de Dirac est utilisée pour modéliser un défaut localisé dans un milieu de guide d'ondes optiques.

–Etudes des phénomènes de *soliton scattering* (Interactions entre le défaut de Dirac et l'onde solitaire du cas $\gamma = 0$) (Cao et Malomed (1995), Goodman, Holmes et Weinstein (2005), Holmer, Marzuola et Zworski (2006))

Dans ces études, rechercher si l'onde stationnaire est stable ou non apparaît comme une première étape.

$-\Delta_\gamma := -\Delta - \gamma\delta(x) = -\Delta$ avec le domaine

$$\{v \in H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap H^1(\mathbb{R}) :$$
$$\partial_x v(0+) - \partial_x v(0-) = -\gamma v(0)\}.$$

Problème de Cauchy pour (NLS)

Proposition (Goodman, Holmes et Weinstein (2004), Cazenave (livre) (2003)) $\forall u_0 \in H^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\exists T = T(u_0) > 0$ et une unique solution $u(\cdot) \in C([0,T), H^1(\mathbb{R},\mathbb{C})) \cap C^1([0,T), H^{-1}(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ de (NLS) avec $u(0) = u_0$ telle que ou bien $T = \infty$, ou bien $T < \infty$ et $\lim_{t\to T} \|\partial_x u\|_{L^2} = \infty$. De plus, l'energie E et la charge Q sont conservées :

$$E(u(t)) = E(u_0), \quad Q(u(t)) = Q(u_0), \quad t \in [0,T),$$

où

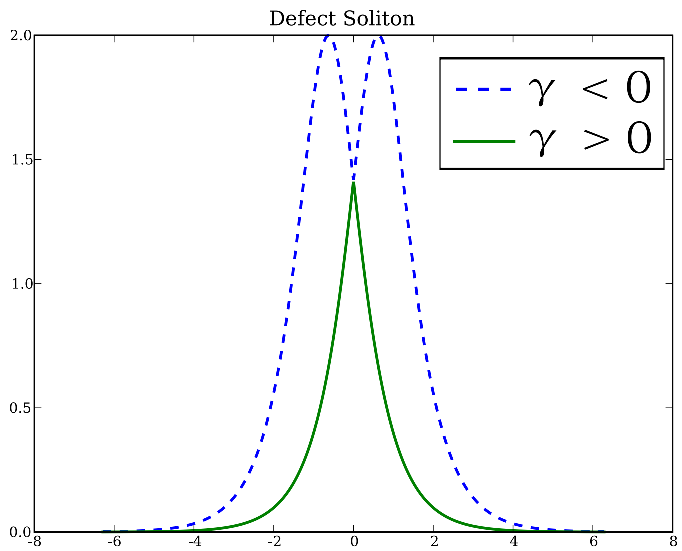
$$\begin{aligned} E(v) &= \frac{1}{2}\|\partial_x v\|_{L^2}^2 - \frac{\gamma}{2}\int_{\mathbb{R}} \delta(x)|v(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &= \frac{1}{2}\|\partial_x v\|_{L^2}^2 - \frac{\gamma}{2}|v(0)|^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \quad Q(v) = \frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

- Globalement bien posé pour $1 < p < 5$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Stabilité Orbitale Parmi les solutions de (NLS), on considère des ondes stationnaires $e^{i\omega t}\phi_{\omega,\gamma}(x)$. Elles existent pour $2\sqrt{\omega} > |\gamma|$, et sont données par

$$\phi_{\omega,\gamma}(x) = \left\{ \frac{(p+1)\omega}{2} \mathrm{sech}^2 \left(\frac{(p-1)\sqrt{\omega}}{2}|x| + \tanh^{-1}\left(\frac{\gamma}{2\sqrt{\omega}}\right)\right)\right\}^{\frac{1}{p-1}}.$$

- Cette solution est l'unique solution positive paire de (SP).



Définition de la stabilité Soit X un espace de Hilbert réel. Pour $\eta > 0$, soit

$$U_\eta(\phi_{\omega,\gamma}) := \left\{ v \in X : \inf_{\theta\in\mathbb{R}} \|v - e^{i\theta}\phi_{\omega,\gamma}\|_X < \eta \right\}.$$

On dit que la solution $e^{i\omega t}\phi_{\omega,\gamma}(x)$ de (NLS) est stable dans X si quelque soit $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $u_0 \in U_\eta(\phi_{\omega,\gamma})$, la solution $u(t)$ de (NLS) avec $u(0) = u_0$ vérifie $u(t) \in U_\varepsilon(\phi_{\omega,\gamma})$ pour tout $t \geq 0$. Sinon, on dit que $e^{i\omega t}\phi_{\omega,\gamma}(x)$ est instable dans X. (Dans cet exposé, $X = H^1(\mathbb{R})$ ou $H^1_r(\mathbb{R})$).
$H^1_r(\mathbb{R}) = \{v \in H^1(\mathbb{R}) : \ v(x) = v(-x), \ x \in \mathbb{R}\}$.

Résultats connus • Le cas $\gamma = 0$: Cazenave et Lions (1982), Berestycki et Cazenave (1981), Weinstein (1983), Grillakis, Shatah et Strauss (1987), Comech et Pelinovsky (2003).
• Le cas $\gamma \neq 0$: Goodman, Holmes et Weinstein (2004) ($\gamma > 0$, $p = 3$) F., Ohta et Ozawa (2006) ($\gamma > 0$, $p > 1$), F. et Jeanjean (2006)($\gamma < 0$, $p > 1$, stabilité dans $H^1_r(\mathbb{R})$).

	$\gamma > 0$	$\gamma = 0$	$\gamma < 0$
$1 < p \leq 3$	stable	stable	stable - r
$3 < p < 5$	stable	stable	instable $\rightarrow$ stable - r
$p = 5$	stable	instable - f	instable
$p > 5$	stable $\rightarrow$ instable	instable - f	instable

• stable $\Leftrightarrow$ stable dans $H^1(\mathbb{R})$.

• stable - r $\Leftrightarrow$ stable dans l'ensemble des fonctions paires $H_r^1(\mathbb{R}) = \{v \in H^1(\mathbb{R}) : \; v(x) = v(-x), \; x \in \mathbb{R}\}$.

• instable - f $\Leftrightarrow$ instable au sens de l'explosion.

• stable $\rightarrow$ instable $\Leftrightarrow$ stabilité lorsque la fréquence ω de l'onde stationnaire est petite, et il existe un ω critique ω_c tel que l'onde stationnaire devient instable pour des fréquences plus grandes que ω_c.

La Question et Le But de cet exposé: Dans le cas stable - r, si on perturbe l'onde stationnaire par une donnée initiale dans $H^1(\mathbb{R})$, reste-t-elle stable ou devient-elle instable?

Théorie de Grillakis Shatah Strauss (1990)

$$J = -i : \begin{pmatrix} \text{Re } u \\ \text{Im } u \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Re } u \\ \text{Im } u \end{pmatrix}$$

$$\text{(NLS)} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{du(t)}{dt} = JE'(u(t)) \quad \text{dans} \quad H^{-1}.$$

Hamiltonien linéarisé autour de $e^{i\omega t}\phi_{\omega,\gamma}$:

$$\frac{dy}{dt} = JH_{\omega,\gamma}y \quad \text{dans} \quad H^{-1},$$

où

$$H_{\omega,\gamma} = E''(\phi_{\omega,\gamma}) + \omega Q''(\phi_{\omega,\gamma}) = \begin{pmatrix} L^{\gamma}_{1,\omega} & 0 \\ 0 & L^{\gamma}_{2,\omega} \end{pmatrix},$$

et pour $v \in \text{Dom}(L^{\gamma}_{1,\omega}) = \text{Dom}(L^{\gamma}_{2,\omega}) = \{v \in H^2(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \cap H^1(\mathbb{R}) :$ $\partial_x v(0+) - \partial_x v(0-) = -\gamma v(0)\}$,

$$L^{\gamma}_{1,\omega}v = -\Delta_\gamma v + \omega v - p\phi^{p-1}_{\omega,\gamma}v,$$

$$L^{\gamma}_{2,\omega}v = -\Delta_\gamma v + \omega v - \phi^{p-1}_{\omega,\gamma}v.$$

Soit $n(H_{\omega,\gamma})$ le nombre de valeurs propres négatives de $H_{\omega,\gamma}$. Du travail de Grillakis Shatah et Strauss, on déduit que, dans les cas $\gamma < 0$, $1 < p \leq 3$ ou $\gamma < 0$, $3 < p < 5$ et ω assez grand,

$$n(H_{\omega,\gamma}) \leq 1 \Longrightarrow \quad \text{Stable dans} \quad H^1(\mathbb{R})$$

$$n(H_{\omega,\gamma}) > 1, \quad n(H_{\omega,\gamma}) - 1 : \text{impaire} \quad \Longrightarrow \quad \text{Instable dans} \quad H^1(\mathbb{R})$$

$$\langle H_{\omega,\gamma} v, v \rangle = \langle L^{\gamma}_{1,\omega} v_1, v_1 \rangle + \langle L^{\gamma}_{2,\omega} v_2, v_2 \rangle,$$

où $v_1 = \mathrm{Re}\, v$, $v_2 = \mathrm{Im}\, v$. Donc, on considère les problèmes aux valeurs propres,

$$\begin{aligned} &L^{\gamma}_{1,\omega} f = \lambda f, \quad f \in H^1(\mathbb{R}), \quad \partial_x f(0+) - \partial_x f(0-) = -\gamma f(0), \\ &L^{\gamma}_{2,\omega} g = \kappa g, \quad g \in H^1(\mathbb{R}), \quad \partial_x g(0+) - \partial_x g(0-) = -\gamma g(0). \end{aligned}$$

• D'après le Théorème de Weyl, le spectre essentiel de $L^{\gamma}_{1,\omega}$ et de $L^{\gamma}_{2,\omega}$ est $[\omega, +\infty)$.

• $L^{\gamma}_{2,\omega}\phi_{\omega,\gamma} = 0$, $\phi_{\omega,\gamma}(x) > 0 \Rightarrow \phi_{\omega,\gamma}$ correspond à la première v.p. de $L^{\gamma}_{2,\omega}$, qui vaut 0.

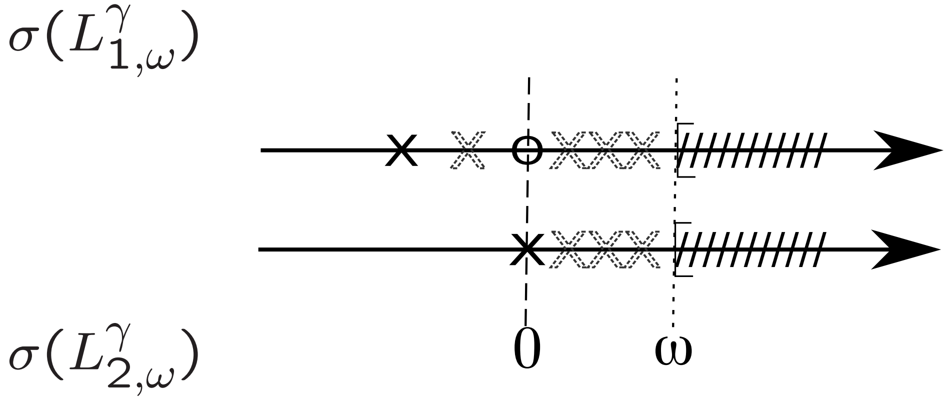
• Comme $\left\langle L^{\gamma}_{1,\omega}\phi_{\omega,\gamma}, \phi_{\omega,\gamma} \right\rangle = -(p-1)\|\phi_{\omega,\gamma}\|^{p+1}_{p+1} < 0$, la première v.p. de $L^{\gamma}_{1,\omega}$ est négative.

• Dans le cas où $\gamma = 0$, le noyau de $L^{0}_{1,\omega}$ est engendré par $\partial_x\phi_{\omega,0} \in \mathrm{Dom}(L^{0}_{1,\omega})$. Le Théorème d'oscillation de Sturm entraine que $L^{0}_{1,\omega}$ a une seule v.p. négative.

• Dans le cas où $\gamma \neq 0$, $L^{\gamma}_{1,\omega}(\partial_x\phi_{\omega,\gamma}) = 0$ pour $x \neq 0$, mais $\partial_x\phi_{\omega,\gamma}$ ne vérifie pas la condition à l'origine $\partial_x v(0+) - \partial_x v(0-) = -\gamma v(0)$. Le noyau de $L^{\gamma}_{1,\omega}$ est zero.

• $L^{\gamma}_{1,\omega}$ a au plus deux v.p. négatives pour $\gamma < 0$ (F. et Jeanjean (2006)).

$$L_{1,\omega}^{\gamma} f = \lambda f, \quad f \in H^1(\mathbb{R}), \quad \partial_x f(0+) - \partial_x f(0-) = -\gamma f(0),$$
$$L_{2,\omega}^{\gamma} g = \kappa g, \quad g \in H^1(\mathbb{R}), \quad \partial_x g(0+) - \partial_x g(0-) = -\gamma g(0).$$

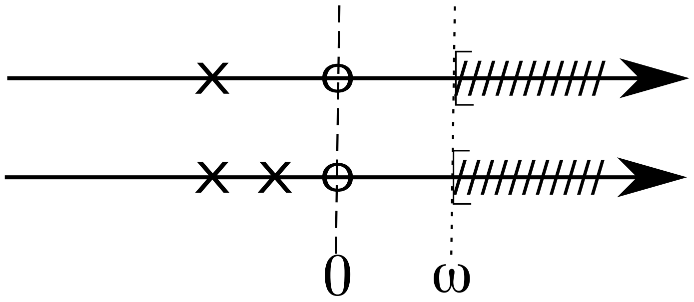


$$n(H_{\omega,\gamma}) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{Stable dans} \quad H^1(\mathbb{R})$$

$$n(H_{\omega,\gamma}) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \text{Instable dans} \quad H^1(\mathbb{R})$$

Problème : le nombre des valeurs propres négatives de $L^{\gamma}_{1,\omega}$

$\sigma(L^{\gamma}_{1,\omega})$ stable dans $H^1(\mathbb{R})$



$\sigma(L^{\gamma}_{1,\omega})$ instable dans $H^1(\mathbb{R})$

(Méthode précédente par F. et Jeanjean) En utilisant la caractérisation de $\phi_{\omega,\gamma}$ comme minimiseur de la fonctionelle d'action dans $\underline{H^1_r(\mathbb{R})}$, on a pu vérifier que $L^{\gamma}_{1,\omega}$ **a une seule valeur propre négative dans le cas symétrique;**

$$L^{\gamma}_{1,\omega} f = \lambda f, \quad f \in \underline{H^1_r(\mathbb{R})}, \quad \partial_x f(0+) - \partial_x f(0-) = -\gamma f(0).$$

Par contre, dans le cas $\underline{H^1(\mathbb{R})}$, cet argument ne marche plus, parce qu'on peut démontrer qu'aucun minimiseur n'existe à cause de la repulsivité du terme de Dirac.

Méthode de Perturbation

On étudie le comportement de la deuxième valeur propre du cas $\gamma = 0$, en perturbant par rapport au paramètre $\gamma \in \mathbb{R}$ puisque

$$L_{1,\omega}^{\gamma} = -\Delta_\gamma + \omega - p\phi_{\omega,\gamma}^{p-1},$$

est holomorphe par rapport à $\gamma \in \mathbb{R}$.

Pour $\gamma \in \mathbb{R}$, la résolvante de $-\Delta_\gamma$ est explicitement donnée par

$$(-\Delta_\gamma - k^2)^{-1} = (-\Delta - k^2)^{-1} + 2\gamma k(-i\gamma + 2k)^{-1}(\overline{G_k(\cdot)}, \cdot)G_k(\cdot),$$

où $k^2 \in \rho(-\Delta_\gamma)$, $\operatorname{Im} k > 0$, $G_k(x) = (i/2k)e^{ik|x|}$.

(Albeverio, Gesztesy, Hoegh-Krohn et Holden (livre))

On fixe $\omega > \gamma^2/4$. On note $L^{\gamma}_{1,\omega} = L^{\gamma}_1$, $\phi_{\omega,\gamma} = \phi_\gamma$...etc.

Le problème aux valeurs propres perturbé:

$$L^{\gamma}_1 f^{\gamma}_2 = \lambda^{\gamma}_2 f^{\gamma}_2, \quad f^{\gamma}_2 \in \underline{H^1(\mathbb{R})}, \quad \partial_x f^{\gamma}_2(0+) - \partial_x f^{\gamma}_2(0-) = -\gamma f^{\gamma}_2(0),$$

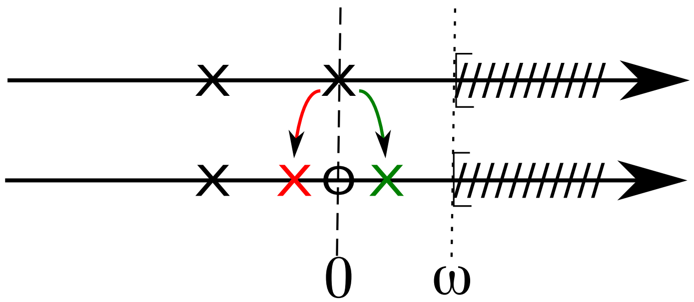
où λ^{γ}_2 est la deuxième valeur propre du cas $\gamma \neq 0$.

Développement de Taylor :

$$\lambda^{\gamma}_2 = \lambda^0_2 + \alpha\gamma + O(\gamma^2), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lambda^0_2 = 0,$$
$$f^{\gamma}_2 = \partial_x \phi_0 + \gamma f_2 + O(\gamma^2), \quad f_2 \in \cap_{\gamma \in \mathbb{R}} \mathrm{Dom}(L^{\gamma}_1), \; L^0_1(\partial_x \phi_0) = 0.$$

(On va voir que $\alpha > 0$)

$\sigma(L^0_1)$ $\gamma = 0$



$\sigma(L^{\gamma}_1)$

$\gamma > 0$... $\lambda^{\gamma}_2 > 0$

$\gamma < 0$... $\lambda^{\gamma}_2 < 0$

On substitue λ_2^γ et f_2^γ dans

$$L_1^\gamma f_2^\gamma = \lambda_2^\gamma f_2^\gamma,$$

en développant $\phi_\gamma = \phi_0 + \gamma g + O(\gamma^2)$, et en utilisant aussi l'équation (SP), l'equation à l'ordre un en γ donne les relations

$$\begin{aligned} &\langle L_1^0 f_2, \psi\rangle = \langle(\alpha + p(p-1)\phi_0^{p-2} g(x))\partial_x \phi_0, \psi\rangle, \\ &\langle L_1^0 g, h\rangle = \phi_0(0)h(0). \end{aligned}$$

D'après

$$\langle L_1^0 f_1, \partial_x \phi_0\rangle = 0,$$
$$L_1^0(\phi_0 - \phi_0^p) = p(p-1)\phi_0^{p-2}(\partial_x\phi_0)^2,$$

en injectant $\psi = \partial_x \phi_0$, et $h = \phi_0 - \phi_0^p$, on obtient

$$\alpha = -\frac{\phi_0^2(0) - \phi_0^{p+1}(0)}{\|\partial_x \phi_0\|_2^2} > 0.$$

Remarque: O.K. pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ puisque le noyau de L_1^γ est zero.

Q: Pourquoi l'onde stationnaire avec $\gamma < 0$ est-elle stable si on considère la stabilité dans $H^1_r(\mathbb{R})$?

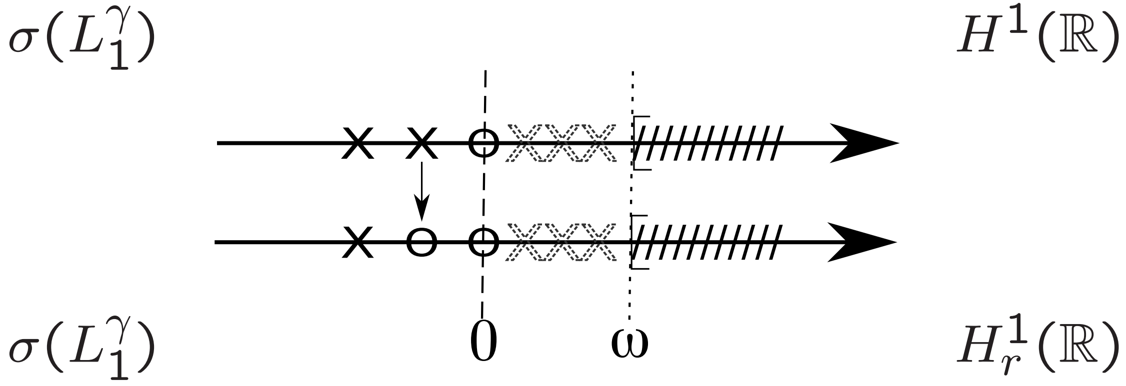
Comme L^γ_1 est pair, on a

$$L^\gamma_1 f^\gamma(-x) = \lambda^\gamma f^\gamma(-x),$$

pour $f^\gamma \in H^1(\mathbb{R})$ vérifiant $L^\gamma_1 f^\gamma(x) = \lambda^\gamma f^\gamma(x)$. Puisque λ^γ est simple, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $f^\gamma(x) = \beta f^\gamma(-x)$. On peut voir que $\beta = \pm 1$. Ainsi, les fonctions propres de L^γ_1 sont paires ou impaires.

• $L^\gamma_1 f^\gamma = \lambda^\gamma f^\gamma$ dans $\underline{H^1_r(\mathbb{R})}$ donne seulement les v.p. de L^γ_1 dans $\underline{H^1(\mathbb{R})}$ correspondant aux fonctions propres paires.

• En particulier, λ^γ_2 dans le cas de $\underline{H^1(\mathbb{R})}$ n'est pas une v.p. de L^γ_1 dans $\underline{H^1_r(\mathbb{R})}$, puisque la deuxième fonction propre $\partial_x \phi_0$ (le cas $\gamma = 0$ et $H_1(\mathbb{R})$) est impaire, donc la deuxième fonction propre perturbée est aussi impaire d'après l'holomorphie.


$\sigma(L_1^\gamma)$
$H^1(\mathbb{R})$
0
ω
$\sigma(L_1^\gamma)$
$H_r^1(\mathbb{R})$