Stabilité globale des ondes progressives pour une équation hyperbolique amortie

Travail en commun avec Romain Joly (Grenoble)

On s'intéresse au comportement pour les grands temps des solutions de l'équation des ondes avec amortissement

$$\alpha u_{tt} + u_t \;=\; u_{xx} - V'(u) \ , \qquad \text{(DHE)}$$

où $\alpha > 0$ (paramètre d'inertie) et $V : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (potentiel non linéaire)

Quelques problèmes où l'équation (DHE) intervient naturellement :

- Chaînes d'oscillateurs non linéaires couplés, dans la limite du continu
- Lignes de transmission non linéaires (sans doute obsolète)
- Modèles en dynamique des populations, lorsque la diffusion des individus est décrite par un processus de saut de vitesse

Comportement asymptotique en temps

Idée générale : *Le comportement asymptotique en temps des solutions de l'équation hyperbolique amortie (DHE) est "comparable" à celui des solutions de l'équation parabolique correspondante* $u_t = u_{xx} - V'(u)$.

Quelques illustrations de ce principe :

• Comparaisons de trajectoires et d'attracteurs pour α petit : Zlamal (1960), Hale et Raugel (1988–1990)

• Existence et stabilité d'ondes progressives : Hadeler (1988–1994), ThG & Raugel (1997–2000)

• Profils auto-similaires au voisinage de l'origine : Matsumura (1976), ThG & Raugel (1998), Ono (2003), Ikehata, Miyaoka, Nakatake, Nishihara, Ohta (2002–2007)

• Equation avec absorption $u_{tt} + u_t = \Delta u - |u|^{p-1}u$: Karch (2000), Todorova & Yordanov (2001), Hayashi & Kaikina & Naumkin (2004–2007), Ikehata, Nishihara, Zhao (2003–2007)

Le cas d'un potentiel bistable

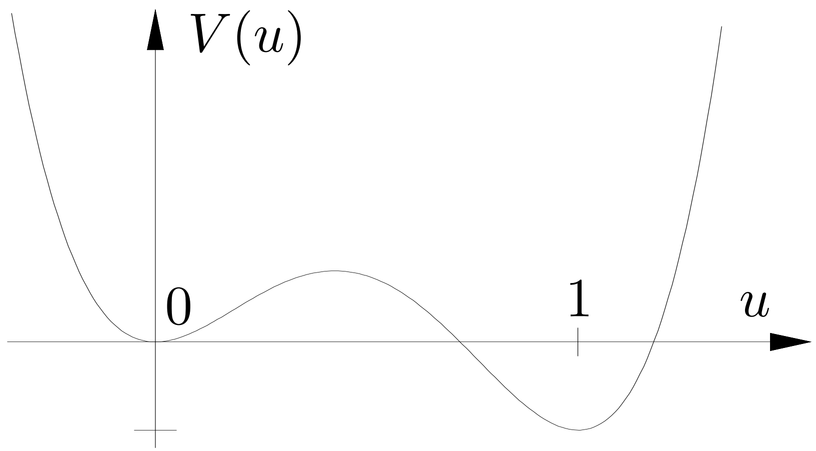
On fait dans toute la suite les hypothèses suivantes sur V :

1. *Coercivité :* $V \in C^3(\mathbf{R})$ et $uV'(u) \geq au^2 - b$ avec $a, b > 0$

2. *Minimum local en* $u = 0$ *:* $V(0) = V'(0) = 0$, $V''(0) > 0$

3. *Minimum global en* $u = 1$ *:* $V(1) < 0$, $V'(1) = 0$, $V''(1) > 0$

4. V n'a pas d'autres valeurs critiques négatives ou nulles



Ondes progressives

On cherche des ondes progressives de l'équation (DHE) sous la forme

$$u(x,t) \;=\; h(x\sqrt{1+\alpha c^2} - ct)\ ,$$

où $c \in \mathbf{R}$ est un paramètre (vitesse parabolique).

Le profil h est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} h''(y) + ch'(y) - V'(h(y)) \;=\; 0\ , \quad y \in \mathbf{R}\ , \\ h(-\infty) \;=\; 1\ , \quad h(+\infty) \;=\; 0\ . \end{cases} \tag{P}$$

Remarque : Le problème (P) est indépendant de α !

Théorème (Aronson & Weinberger, 1975) : *Il existe une unique valeur $c_* > 0$ telle que le problème (P) ait une solution. Le profil $h : \mathbf{R} \to (0,1)$ est unique aux translations près, strictement décroissant, et converge exponentiellement vers ses limites à l'infini.*

Quelques résultats de stabilité (ThG & Raugel)

Cas d'un potentiel bistable :

• Stabilité locale dans $H^1(\mathbf{R}) \times L^2(\mathbf{R})$, par un argument spectral (2000)

Cas d'un potentiel monostable :

• Stabilité locale dans un espace à poids exponentiel, par une méthode d'énergie (1997)

• Etude détaillée de la perturbation pour la vitesse critique (2000)

• Stabilité globale lorsque $-V'(u) = u - u^2$ et $\alpha > 0$ petit (1997)

Rappel : Les solutions de l'équation (DHE) à valeurs dans un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ obéissent au **principe du maximum** seulement si

$$4\alpha \sup_{u \in I} V''(u) \leq 1 \, .$$

(Condition d'amortissement fort pour l'oscillateur $\alpha u_{tt} + u_t = -V'(u)$)

Le résultat principal

Théorème : *Soient $\alpha > 0$ et V comme ci-dessus. Il existe des constantes positives δ et ν telles que, pour toutes les données initiales $(u_0, u_1) \in H^1_{\mathrm{ul}}(\mathbf{R}) \times L^2_{\mathrm{ul}}(\mathbf{R})$ vérifiant*

$$\limsup_{x \to -\infty} \int_x^{x+1} \Big((u_0 - 1)^2 + {u_0'}^2 + u_1^2\Big)\,\mathrm{d}x \;\le\; \delta\ ,$$

$$\limsup_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} \Big(u_0^2 + {u_0'}^2 + u_1^2\Big)\,\mathrm{d}x \;\le\; \delta\ ,$$

l'équation (DHE) possède une solution unique, globale pour les temps positifs, qui vérifie $u(\cdot, 0) = u_0$, $u_t(\cdot, 0) = u_1$. En outre, il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \Big| u(x,t) - h(x\sqrt{1 + \alpha c_*^2} - c_* t - x_0) \Big| \;=\; \mathcal{O}(e^{-\nu t})\ ,$$

lorsque $t \to +\infty$.

Espaces de Sobolev uniformément locaux

Pour tout $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ on note

$$\|u\|_{L^2_{\mathrm{ul}}} = \sup_{x \in \mathbf{R}} \Big(\int_x^{x+1} |u(y)|^2 \,\mathrm{d}y \Big)^{1/2} = \sup_{x \in \mathbf{R}} \|u\|_{L^2([x,x+1])} \le \infty \,.$$

L'espace de Lebesgue L^2 uniformément local est défini par

$$L^2_{\mathrm{ul}}(\mathbf{R}) = \Big\{ u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}) \,\Big|\, \|u\|_{L^2_{\mathrm{ul}}} < \infty \,,\; \lim_{\xi \to 0} \|T_\xi u - u\|_{L^2_{\mathrm{ul}}} = 0 \Big\} \,,$$

où T_ξ est l'opérateur de translation spatiale : $(T_\xi u)(x) = u(x - \xi)$.

Pour $k \in \mathbf{N}$, on définit de même l'espace de Sobolev uniformément local

$$H^k_{\mathrm{ul}}(\mathbf{R}) = \Big\{ u \in L^2_{\mathrm{ul}}(\mathbf{R}) \,\Big|\, \partial^j u \in L^2_{\mathrm{ul}}(\mathbf{R}) \text{ for } j = 1, 2, \dots, k \Big\} \,,$$

muni de la norme $\|u\|_{H^k_{\mathrm{ul}}} = (\|u\|^2_{L^2_{\mathrm{ul}}} + \ldots + \|\partial^k u\|^2_{L^2_{\mathrm{ul}}})^{1/2}$.

Convergence globale vers des ondes progressives

(historique sommaire dans le cas parabolique)

• Kolmogorov, Petrovskii & Piskunov (1937) : équation scalaire, non-linéarité monostable, principe du maximum

• Kanel (1962–1964) : équation parabolique scalaire, non-linéarité de type combustion, principe du maximum

• Fife & McLeod (1977–1981) : équation scalaire, non-linéarité bistable, principe du maximum et fonction de Lyapunov

• Volpert, Volpert & Volpert (1990–2002) : systèmes paraboliques monotones, différentes non-linéarités, principe du maximum

• Roquejoffre (1994–1997) : équation scalaire dans un domaine cylindrique, principe du maximum et fonction de Lyapunov

• Risler (2003–2007) : système parabolique $u_t = u_{xx} - \nabla V(u)$,
où $u \in \mathbf{R}^n$ et $V : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, fonctions de Lyapunov

Equations dans un référentiel en mouvement

Soit $u(x,t)$ une solution de (DHE). Etant donné $c>0$, on note

$$u(x,t) \;=\; v(x\sqrt{1+\alpha c^2} - ct\,,\, t)\;, \quad \text{ou} \quad v(y,t) \;=\; u\Big(\frac{y+ct}{\sqrt{1+\alpha c^2}}\,,\, t\Big)\;.$$

La nouvelle fonction $v(y,t)$ obéit à l'équation

$$\alpha v_{tt} + v_t - 2\alpha c\, v_{yt} \;=\; v_{yy} + c v_y - V'(v)\;. \qquad (\mathrm{DHE}_c)$$

Par construction, si $c = c_*$, l'onde progressive $v(y,t) = h(y)$ est une solution stationnaire de (DHE_c).

Attention : le nouveau référentiel se déplace à la vitesse

$$s \;=\; \frac{c}{\sqrt{1+\alpha c^2}} \;\in\; \left]0, \alpha^{-1/2}\right[\;,$$

et non à la vitesse parabolique $c \in \left]0,+\infty\right[$!

Fonctions de Lyapunov

Si $c > 0$ et si $v(y,t)$ est une solution de (DHE$_c$), on définit

$$E_c(t) \;=\; \int_{\mathbf{R}} e^{cy}\Big(\frac{\alpha}{2}v_t(y,t)^2 + \frac{1}{2}v_y(y,t)^2 + V(v(y,t))\Big)\,\mathrm{d}y\ .$$

Alors, au moins formellement :

$$E_c'(t) \;=\; -(1+\alpha c^2)\int_{\mathbf{R}} e^{cy}v_t(y,t)^2\,\mathrm{d}y \;\le\; 0\ .$$

Problème technique : E_c n'est pas défini pour tout $(v, v_t) \in H^1_{\mathrm{ul}} \times L^2_{\mathrm{ul}}$!

Remèdes possibles :

- Tronquer le poids exponentiel e^{cy} (Risler)
- Traiter séparément la solution au voisinage de $+\infty$ (ThG & Joly)
- Restreindre la classe des données initiales admissibles (ici)

Fonctions de Lyapunov (bis)

L'équation hyperbolique amortie (DHE) possède une famille continue, indexée par $c > 0$, de fonctions de Lyapunov non équivalentes. Mais :

1. On ne sait pas *a priori* si E_c est borné inférieurement. En fait, si

$$\mathcal{E}_c[v] \;=\; \int_{\mathbf{R}} e^{cy}\Bigl(\frac{1}{2}v_y(y)^2 + V(v(y))\Bigr)\,\mathrm{d}y \;,$$

on peut montrer que

$$\inf_{v\in H_c^1(\mathbf{R})} \mathcal{E}_c[v] \;=\; \begin{cases} \;0 & \text{si} \quad c \ge c_* \;, \\ -\infty & \text{si} \quad c < c_* \;, \end{cases}$$

où $H_c^1(\mathbf{R}) = \{v \in L^\infty(\mathbf{R}) \,|\, e^{cy/2}\, v \in H^1(\mathbf{R})\}$.

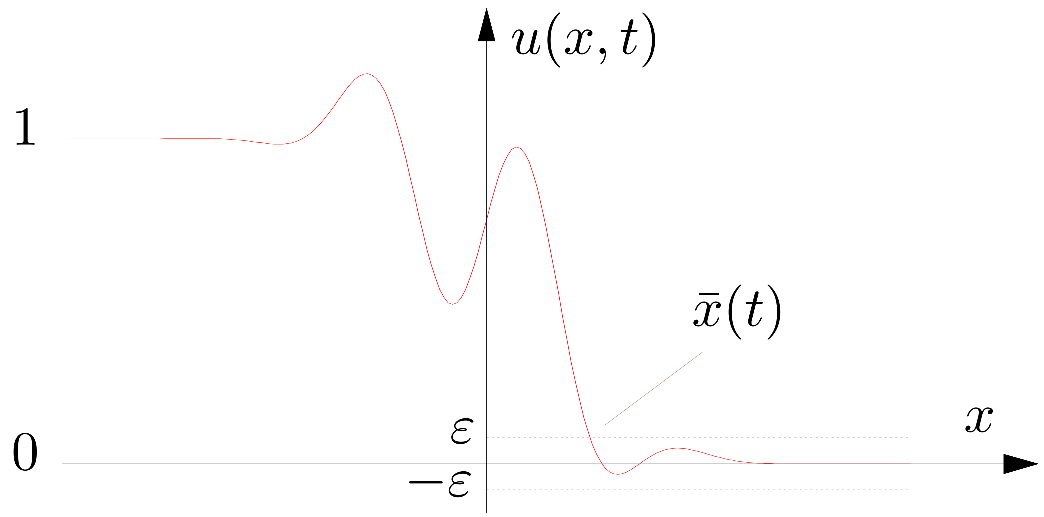
2. Lorsque E_c est borné inférieurement, on peut extraire des sous-suites $v(\cdot, t_n)$ qui convergent uniformément sur tout compact vers une solution stationnaire dans le référentiel en mouvement, mais on ne peut pas exclure *a priori* qu'il s'agisse de la solution triviale $v \equiv 0$.

Le point d'invasion (E. Risler)

Soit $0 < \varepsilon \ll 1$. Si $u(x,t)$ est une solution de (DHE) vérifiant les hypothèses du théorème principal, on définit le "point d'invasion"

$$\bar{x}(t) \;=\; \max\left\{x \in \mathbf{R} \;\middle|\; |u(x,t)| \geq \varepsilon\right\} \;,$$

qui permet de suivre "continûment" la position de l'interface en mouvement. Par construction, $|u(\bar{x}(t),t)| = \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$.



Borne inférieure sur l'énergie

Dans le référentiel en mouvement à vitesse parabolique $c > 0$, le point d'invasion s'écrit :

$$\bar{y}_c(t) \;=\; \sqrt{1+\alpha c^2}\,\bar{x}(t) - ct \;.$$

En termes de cette quantité, l'énergie E_c se minore de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
E_c(t) \;&=\; \int_{-\infty}^{\bar{y}_c(t)} e^{cy}\Big(\frac{\alpha}{2}v_t^2 + \frac{1}{2}v_y^2 + V(v)\Big)\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{\bar{y}_c(t)}^{\infty} e^{cy}\Big(\frac{\alpha}{2}v_t^2 + \frac{1}{2}v_y^2 + V(v)\Big)\,\mathrm{d}y \\
&\geq\; \int_{-\infty}^{\bar{y}_c(t)} e^{cy}\,V(-1)\,\mathrm{d}y + \int_{\bar{y}_c(t)}^{\infty} e^{cy}\Big(\frac{1}{2}v_y^2 + \frac{1}{4}V''(0)v^2\Big)\,\mathrm{d}y \\
&\geq\; e^{c\bar{y}_c(t)}\Big(\frac{V(-1)}{c} + \kappa\varepsilon^2\Big)\,, \quad \text{où} \quad \kappa \;=\; \Big(\frac{V''(0)}{8}\Big)^{1/2}\;.
\end{aligned}$$

Étape I : Contrôle de la vitesse d'invasion

On cherche à estimer la vitesse moyenne du point d'invasion. On note

$$s_- \;=\; \liminf_{t\to+\infty} \frac{\bar{x}(t)}{t}\;, \qquad s_+ \;=\; \limsup_{t\to+\infty} \frac{\bar{x}(t)}{t}\;.$$

Proposition 1 : *On a* $0 < s_- \le s_+ < 1/\sqrt{\alpha}\,$.

Preuve :

• Si $c > 0$ est assez grand pour que $\kappa c\,\varepsilon^2 + V(-1) > 0$, l'inégalité

$$E_c(0) \;\ge\; E_c(t) \;\ge\; e^{c\bar{y}_c(t)}\Big(\frac{V(-1)}{c} + \kappa\varepsilon^2\Big) \;>\; 0$$

montre que $\bar{y}_c(t)$ est borné supérieurement. Ainsi

$$s_+ \;=\; \frac{c}{\sqrt{1+\alpha c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha c^2}}\,\limsup_{t\to+\infty} \frac{\bar{y}_c(t)}{t} \;<\; 1/\sqrt{\alpha}\;.$$

• Sous les hypothèses du théorème principal, on a $E_c(0) \to -\infty$ lorsque $c \to 0$. Si $c > 0$ est assez petit pour que $E_c(0) < 0$, alors

$$0 \;>\; E_c(0) \;\geq\; E_c(t) \;\geq\; e^{c\bar{y}_c(t)}\,\frac{V(-1)}{c}\ ,$$

donc $\bar{y}_c(t)$ est borné inférieurement. Ainsi

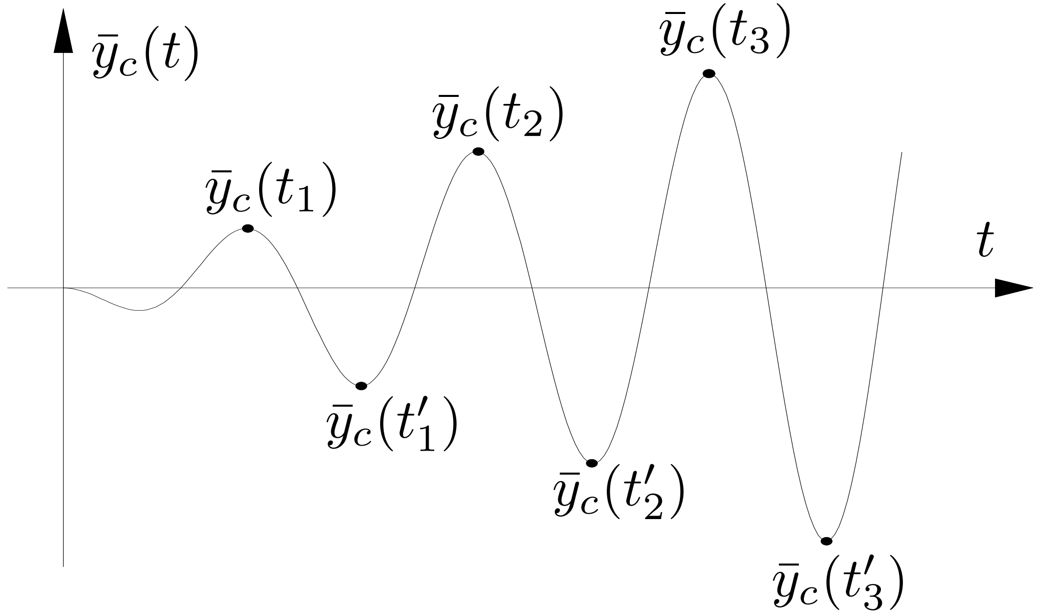
$$s_- \;=\; \frac{c}{\sqrt{1+\alpha c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha c^2}}\,\liminf_{t\to+\infty}\frac{\bar{y}_c(t)}{t} \;>\; 0\ .$$

Proposition 2 : *On a $s_- = s_+$, de sorte que la limite suivante existe :*

$$s_\infty \;\equiv\; \frac{c_\infty}{\sqrt{1+\alpha c_\infty^2}} \;=\; \lim_{t\to+\infty}\frac{\bar{x}(t)}{t}\ .$$

Preuve : Si $s_- < s_+$, il existe des suites $t_n \to \infty$, $t'_n \to \infty$ telles que

$$\frac{\bar{x}(t_n)}{t_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} s_+\ , \qquad \frac{\bar{x}(t'_n)}{t'_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} s_-\ .$$



Dans un référentiel en mouvement à vitesse $s \in]s_-, s_+[$, le point d'invasion vérifie donc

$$\bar{y}_c(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \ , \qquad \bar{y}_c(t'_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty \ ,$$

où $s = c/\sqrt{1+\alpha c^2}$. En particulier,

$$E_c(t'_n) \geq e^{c\bar{y}_c(t'_n)} \frac{V(-1)}{c} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ ,$$

ce qui montre que $E_c(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. Il s'ensuit que

$$\int_0^\infty \int_{\mathbf{R}} e^{cy} |v_t(y,t)|^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t \; < \; \infty \; ,$$

et comme $\bar{y}_c(t_n) \to +\infty$ on en déduit que

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}} e^{cy} |v_t(\bar{y}_c(t_n) + y, t_n + t)|^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t \; \xrightarrow[n \to \infty]{} \; 0 \; .$$

Après extraction d'une sous-suite, on a donc

$$u(\bar{x}(t_n) + x, t_n + t) \; \xrightarrow[n \to \infty]{} \; w(x,t)$$

dans $C^1([0,T], L^2_{\mathrm{loc}}) \cap C^0([0,T], H^1_{\mathrm{loc}})$, où $w(x,t)$ est une solution de (DHE) qui vérifie en outre

$$w_t + s w_x \; = \; 0 \; .$$

Comme $s \in \,]s_-, s_+[$ était *arbitraire*, on en déduit que $w_t = w_x \equiv 0$, donc $|w| \equiv \varepsilon$. Ceci est absurde car $V'(\pm\varepsilon) \neq 0$.

Étape II : Relaxation autour du point d'invasion

Le point-clef de la démonstration est le résultat suivant :

Proposition 3 : *Soit* $c = c_\infty$*. Pour tout* $T > 0$ *on a*

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}} e^{cy} |v_t(\bar{y}_c(t) + y, t + \tau)|^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}\tau \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \; .$$

Dans le cas de l'équation *scalaire* (DHE) on en déduit facilement :

Corollaire : *On a* $c_\infty = c_*$*, et pour tout* $L > 0$ *:*

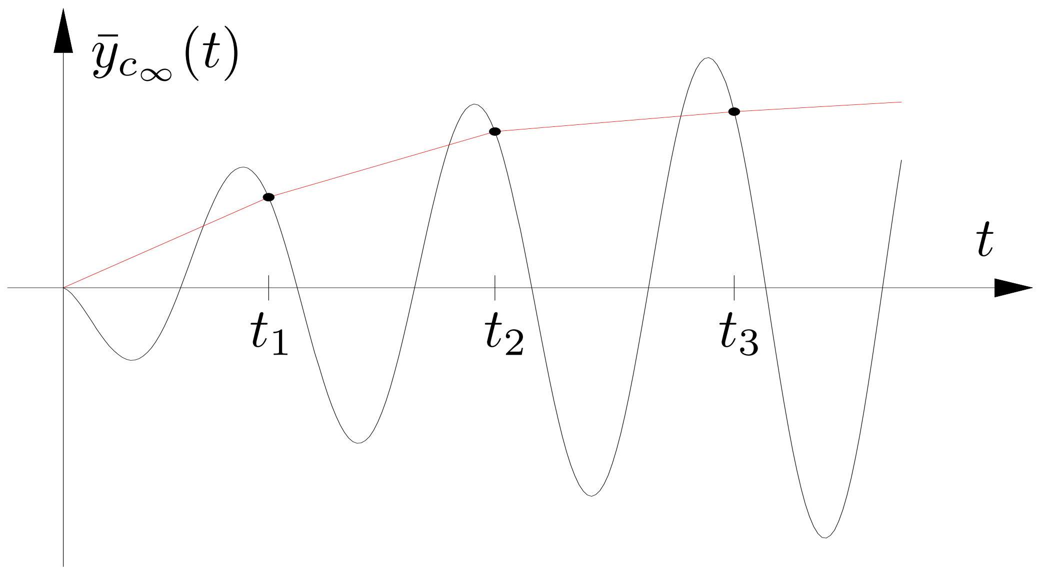
$$\sup_{|x| \le L} \left| u(\bar{x}(t) + x, t) - h_\varepsilon(x\sqrt{1 + \alpha c_*^2}) \right| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \; ,$$

où h_ε *est l'onde progressive (unique) normalisée de façon que* $h_\varepsilon(0) = \varepsilon$*.*

La difficulté principale de la démonstration de la Proposition 3 est que l'on ne sait pas *a priori* que le point d'invasion reste borné dans le référentiel en mouvement à vitesse s_∞ : on sait seulement que

$$\frac{\bar{y}_{c_\infty}(t)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \; .$$

On argumente par contradiction, et on utilise une "ligne brisée" pour suivre le point d'invasion.

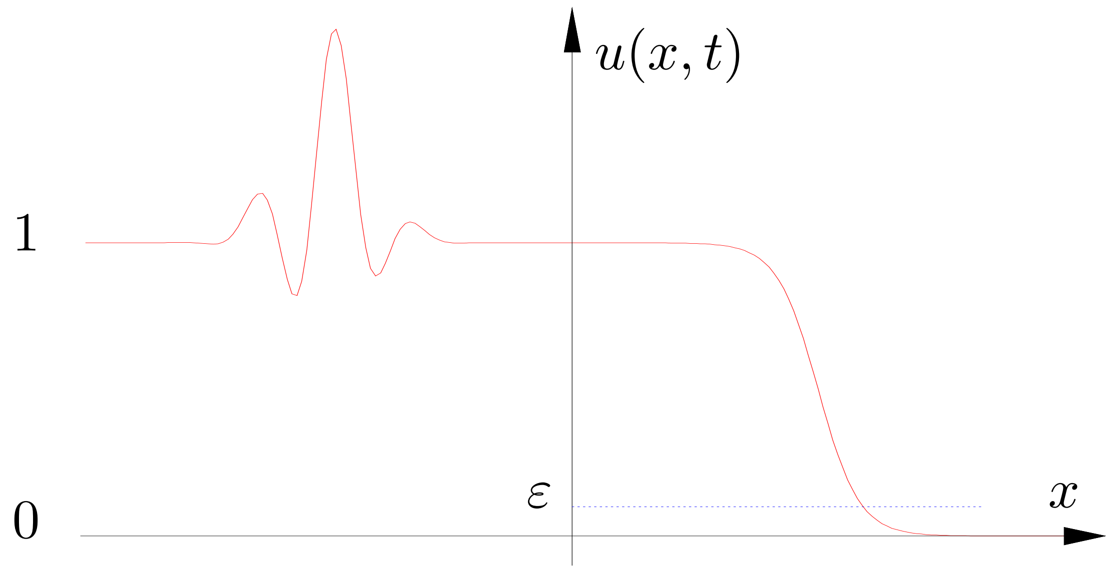


Étape III : Réparation à l'arrière du front

En utilisant des estimations d'énergie dans le référentiel immobile, on montre que la solution $u(x,t)$ tend uniformément vers 1 loin derrière le point d'invasion. On en conclut :

Proposition 4 : *La solution $u(x,t)$ de l'équation (DHE) vérifie*

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left| u(\bar{x}(t)+x,t) - h_\varepsilon(x\sqrt{1+\alpha c_*^2}) \right| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \ .$$



Étape IV : Stabilité locale

Lorsque $c = c_*$, on étudie l'équation (DHE$_c$) linéarisée autour du profil de l'onde progressive :

$$\alpha v_{tt} + v_t - 2\alpha c_* v_{yt} \;=\; v_{yy} + c_* v_y - V''(h)v \ .$$

Cette équation définit un semi-groupe C_0 dans $H^1_{\mathrm{ul}} \times L^2_{\mathrm{ul}}$ dont on note $\mathcal{L}$ le générateur.

Proposition 5 : *Il existe $\nu > 0$ tel que le spectre de $\mathcal{L}$ vérifie*

$$\mathrm{spec}(\mathcal{L}) \;\subset\; \{0\} \cup \{z \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Re}\,(z) \le -\nu\} \ .$$

La valeur propre 0 *est simple, et la fonction propre associée est* $(h', 0)$.

Des résultats semblables sont valables pour le semi-groupe engendré par $\mathcal{L}$, et permettent de conclure par des arguments standards (Sattinger, 1976) la démonstration du théorème principal.