

Un résultat de compacité en micromagnétisme

Radu IGNAT

Laboratoire Jacques-Louis Lions
Université Paris 6

(en collaboration avec Felix OTTO)

Lille, 22 Mars 2007

Micromagnétisme

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $m : \Omega \rightarrow S^2$ **aimantation**,

$$E_{3D} = \underbrace{d^2 \int_{\Omega} |\nabla m|^2}_{\text{Energie d'échange}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2}_{\text{Energie démagnétisante}}$$

Micromagnétisme

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $m : \Omega \rightarrow S^2$ **aimantation**,

$$E_{3D} = \underbrace{d^2 \int_{\Omega} |\nabla m|^2}_{\text{Energie d'échange}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2}_{\text{Energie démagnétisante}}$$

où $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ **potentiel démagnétisant** déterminé par

$$\Delta u = \nabla \cdot (m \mathbf{1}_{\Omega}) \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Micromagnétisme

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $m : \Omega \rightarrow S^2$ **aimantation**,

$$E_{3D} = \underbrace{d^2 \int_{\Omega} |\nabla m|^2}_{\text{Energie d'échange}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2}_{\text{Energie démagnétisante}}$$

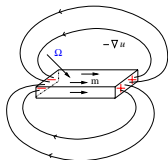
où $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ **potentiel démagnétisant** déterminé par

$$\Delta u = \nabla \cdot (m \mathbf{1}_{\Omega}) \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

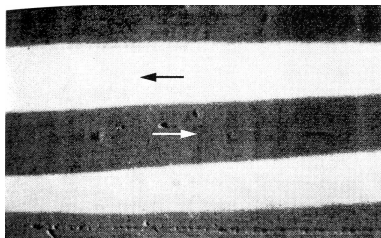
Charges de volume : $\Delta u = \nabla \cdot m$ dans Ω

Charges de surface : $\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right] = m \cdot \nu$ sur $\partial\Omega$

d = longueur d'échange d'ordre $O(nm)$



Domaines magnétiques & parois



Observation physique

- des vastes régions uniformément magnétisées (**domaines magnétiques**)
- couches limites (**parois**)

Structure de paroi

Un exemple de paroi dans un film mince.

Structure de paroi

Un exemple de paroi dans un film mince.

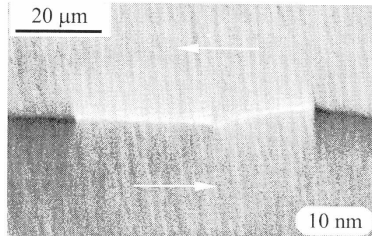


FIG.: Paroi de Néel

- observée dans des films très minces
- aimantation à valeurs S^1
- structure $1D$

Films minces

$$\Omega = \Omega' \times (0, t), \quad \ell = \text{diam } \Omega'.$$

Régime : $t \ll d$, $d^2 \ll t \ell$.

Films minces

$\Omega = \Omega' \times (0, t)$, $\ell = \text{diam } \Omega'$.

Régime : $t \ll d$, $d^2 \ll t \ell$.

Hypothèses supplémentaires pour m :

- $m = m(x_1, x_2)$ (l'énergie d'échange domine dans x_3)

Films minces

$$\Omega = \Omega' \times (0, t), \quad \ell = \text{diam } \Omega'.$$

Régime : $t \ll d$, $d^2 \ll t \ell$.

Hypothèses supplémentaires pour m :

- $m = m(x_1, x_2)$ (l'énergie d'échange domine dans x_3)
- $m_3 = 0$ (pas de charges de surface)

Films minces

$$\Omega = \Omega' \times (0, t), \quad \ell = \text{diam } \Omega'.$$

Régime : $t \ll d$, $d^2 \ll t \ell$.

Hypothèses supplémentaires pour m :

- $m = m(x_1, x_2)$ (l'énergie d'échange domine dans x_3)
- $m_3 = 0$ (pas de charges de surface)

Alors l'aimantation est $2D$:

$$m' : \Omega' \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Ici, l'apostrophe ' désigne une quantité $2D$.

Comment approcher l'énergie démagnétisante ?

$$\Delta u = \nabla' \cdot m' \mathbf{1}_{(0,t)}(x_3)$$

Comment approcher l'énergie démagnétisante ?

$$\Delta \frac{1}{t} u = \nabla' \cdot m' \frac{1}{t} \mathbf{1}_{(0,t)}(x_3) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \nabla' \cdot m' \mathcal{H}^2 \llcorner \{x_3 = 0\}$$

Comment approcher l'énergie démagnétisante ?

$$\Delta \frac{1}{t} u = \nabla' \cdot m' \frac{1}{t} \mathbf{1}_{(0,t)}(x_3) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \nabla' \cdot m' \mathcal{H}^2 \llcorner \{x_3 = 0\}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{t} \rightarrow U \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta U = 0 & \text{si } x_3 \neq 0, \\ \left[\frac{\partial U}{\partial x_3} \right] = \nabla' \cdot m' & \text{si } x_3 = 0. \end{cases}$$

Comment approcher l'énergie démagnétisante ?

$$\Delta \frac{1}{t} u = \nabla' \cdot m' \frac{1}{t} \mathbf{1}_{(0,t)}(x_3) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \nabla' \cdot m' \mathcal{H}^2 \llcorner \{x_3 = 0\}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{t} \rightarrow U \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta U = 0 & \text{si } x_3 \neq 0, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial x_3} \right] = \nabla' \cdot m' & \text{si } x_3 = 0. \end{cases}$$

On a :

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi' \cdot \mathcal{F}(m')|^2}{|\xi'|} d\xi'$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx \approx t^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U|^2 dx.$$

Energie approchée pour les films minces

$$E_{3D} \approx d^2 t \int_{\Omega'} |\nabla' m'|^2 dx' + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla'^{-\frac{1}{2}} \nabla' \cdot m'|^2 dx'.$$

Energie approchée pour les films minces

$$E_{3D} \approx d^2 t \int_{\Omega'} |\nabla' m'|^2 dx' + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla'^{-\frac{1}{2}} \nabla' \cdot m'|^2 dx'.$$

Adimensionner : $\omega' = \frac{\Omega'}{\ell}$, $E_\varepsilon = \frac{E_{3D}}{\ell t^2}$, $\varepsilon = \frac{d^2}{\ell t} \ll 1$

$$E_\varepsilon(m') = \varepsilon \int_{\omega'} |\nabla' m'|^2 dy' + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla'^{-\frac{1}{2}} \nabla' \cdot m'|^2 dy'.$$

Energie approchée pour les films minces

$$E_{3D} \approx d^2 t \int_{\Omega'} |\nabla' m'|^2 dx' + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla'^{-\frac{1}{2}} \nabla' \cdot m'|^2 dx'.$$

Adimensionner : $\omega' = \frac{\Omega'}{\ell}$, $E_\varepsilon = \frac{E_{3D}}{\ell t^2}$, $\varepsilon = \frac{d^2}{\ell t} \ll 1$

$$E_\varepsilon(m') = \varepsilon \int_{\omega'} |\nabla' m'|^2 dy' + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla'^{-\frac{1}{2}} \nabla' \cdot m'|^2 dy'.$$

Soit $m'_\varepsilon : \omega' \rightarrow S^1$ un minimiseur de E_ε .

Problème : Caractériser $m^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m'_\varepsilon$.

Prédiction (van der Berg) : à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on a

$$\begin{cases} |m^*|^2 = 1 \text{ et } \nabla \cdot m^* = 0 & \text{dans } \omega', \\ m^* \cdot \nu' = 0 & \text{sur } \partial\omega'. \end{cases}$$

Prédiction (van der Berg) : à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on a

$$\begin{cases} |m^*|^2 = 1 \text{ et } \nabla \cdot m^* = 0 & \text{dans } \omega', \\ m^* \cdot \nu' = 0 & \text{sur } \partial\omega'. \end{cases}$$

On pose $m^* = \nabla'^{\perp} \psi$. Alors

$$|\nabla' \psi|^2 = 1 \text{ dans } \omega' \quad \text{et} \quad \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega'.$$

Prédiction (van der Berg) : à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on a

$$\begin{cases} |m^*|^2 = 1 \text{ et } \nabla \cdot m^* = 0 & \text{dans } \omega', \\ m^* \cdot \nu' = 0 & \text{sur } \partial\omega'. \end{cases}$$

On pose $m^* = \nabla'^{\perp} \psi$. Alors

$$|\nabla' \psi|^2 = 1 \text{ dans } \omega' \quad \text{et} \quad \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega'.$$

\Rightarrow PAS de solution régulière (**lignes de discontinuité pour m^***)

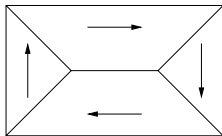
Prédiction (van der Berg) : à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on a

$$\begin{cases} |m^*|^2 = 1 \text{ et } \nabla \cdot m^* = 0 & \text{dans } \omega', \\ m^* \cdot \nu' = 0 & \text{sur } \partial\omega'. \end{cases}$$

On pose $m^* = \nabla'^{\perp} \psi$. Alors

$$|\nabla' \psi|^2 = 1 \text{ dans } \omega' \quad \text{et} \quad \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega'.$$

\Rightarrow PAS de solution régulière (**lignes de discontinuité pour m^***)

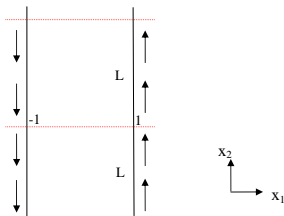


Etat Landau : $m^* = \nabla'^{\perp} \text{dist}(x', \partial\omega')$

But :

- Compacité des minimiseurs.
- Optimalité de la paroi de Néel sous des perturbations $2D$.

Modèle 2D

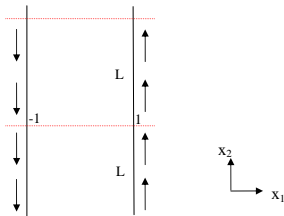


Section du film $\Omega = (-1, 1) \times \mathbb{R}$.

Aimantations admissibles :

- $m : \Omega \rightarrow S^1$ régulière,
- conditions limites (CL) : $m = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ si $x_1 \geq \pm 1$,
- m est L -périodique en x_2 .

Modèle 2D



Section du film $\Omega = (-1, 1) \times \mathbb{R}$.

Aimantations admissibles :

- $m : \Omega \rightarrow S^1$ régulière,
- conditions limites (CL) : $m = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ si $x_1 \geq \pm 1$,
- m est L -périodique en x_2 .

Energie 2D :

$$E_\varepsilon(m) = \varepsilon \int_{\mathbb{R} \times (0, L)} |\nabla m|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \times (0, L)} \left| \nabla^{-1/2} \nabla \cdot m \right|^2 dx.$$

Paroi de Néel

Cas $1D$: $m = (m_1(x_1), m_2(x_1))$; (CL) $\Rightarrow \nabla \cdot m = \frac{dm_1}{dx_1} \neq 0$.

Paroi de Néel

Cas 1D : $m = (m_1(x_1), m_2(x_1))$; (CL) $\Rightarrow \nabla \cdot m = \frac{dm_1}{dx_1} \neq 0$.

Energie 1D : $E_\varepsilon^{1D}(m) = \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{dm}{dx_1} \right|^2 dx_1 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d}{dx_1} m_1 \right|^2 dx_1$.

Paroi de Néel \equiv minimiseur de E_ε^{1D}

Paroi de Néel

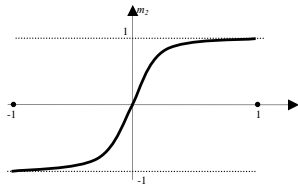
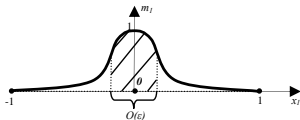
Cas 1D : $m = (m_1(x_1), m_2(x_1))$; (CL) $\Rightarrow \nabla \cdot m = \frac{dm_1}{dx_1} \neq 0$.

Energie 1D : $E_\varepsilon^{1D}(m) = \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{dm}{dx_1} \right|^2 dx_1 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d}{dx_1} m_1 \right|^2 dx_1$.

Paroi de Néel \equiv minimiseur de E_ε^{1D}

couche de transition à deux échelles :

- petit coeur ($|x_1| \lesssim w_{\text{coeur}}$) à variation rapide
- queue $w_{\text{coeur}} \lesssim |x_1| \lesssim 1$ à décroissance logarithmique.



Comportement qualitatif (Melcher) :

$$\min_{m \text{ est } 1D \text{ avec (CL)}} E_{\varepsilon}^{1D}(m) \approx \frac{\pi}{2|\ln \varepsilon|} \text{ si } \varepsilon \ll 1;$$

si m minimiseur alors $m_1(0) = 1$, m_1 est symétrique en 0,
 $w_{\text{coeur}} \sim \varepsilon$ et $m_1(x_1) \sim \frac{|\ln|x_1||}{|\ln \varepsilon|}$ si $\varepsilon \lesssim |x_1| \lesssim 1$.

Comportement qualitatif (Melcher) :

$$\min_{m \text{ est } 1D \text{ avec (CL)}} E_{\varepsilon}^{1D}(m) \approx \frac{\pi}{2|\ln \varepsilon|} \text{ si } \varepsilon \ll 1;$$

si m minimiseur alors $m_1(0) = 1$, m_1 est symétrique en 0,
 $w_{\text{coeur}} \sim \varepsilon$ et $m_1(x_1) \sim \frac{|\ln|x_1||}{|\ln \varepsilon|}$ si $\varepsilon \lesssim |x_1| \lesssim 1$.

Stabilité 2D de la paroi (DeSimone, Knüpfer, Otto) :

$$\min_{m \text{ est } 2D \text{ avec (CL)}} E_{\varepsilon}(m) \approx \min_{m \text{ est } 1D \text{ avec (CL)}} E_{\varepsilon}(m) \approx \frac{\pi L}{2|\ln \varepsilon|} \text{ si } \varepsilon \ll 1.$$

Optimalité de la paroi de Néel

Théorème (I., Otto)

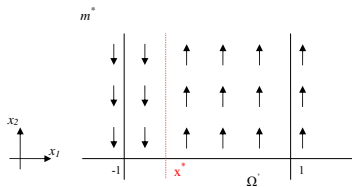
Si $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1$ avec (CL), L -périodique en x_2 et

$$|\ln \varepsilon| E_\varepsilon(m) \approx \frac{\pi L}{2},$$

alors

$$m \approx m^*,$$

où $m^*(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ si $\pm x_1 > \pm x_1^*$, $x_1^* \in [-1, 1]$.



Compacité locale

Théorème (I., Otto)

Si $m_\varepsilon : B_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1$ (sans (CL)) et

$$E_\varepsilon(m_\varepsilon, B_1) = \varepsilon \int_{B_1} |\nabla m|^2 + \frac{1}{2} \int_{B_1} |\nabla^{-\frac{1}{2}} \nabla \cdot m|^2 \leq \frac{C}{|\ln \varepsilon|},$$

alors $\{m_\varepsilon\}$ *rel. compacte dans* $L^1(B_1)$. Si $m : B_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une limite,

$$|m| = 1 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot m = 0 \quad \text{dans } B_1.$$

Compacité locale

Théorème (I., Otto)

Si $m_\varepsilon : B_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1$ (sans (CL)) et

$$E_\varepsilon(m_\varepsilon, B_1) = \varepsilon \int_{B_1} |\nabla m|^2 + \frac{1}{2} \int_{B_1} |\nabla^{-\frac{1}{2}} \nabla \cdot m|^2 \leq \frac{C}{|\ln \varepsilon|},$$

alors $\{m_\varepsilon\}$ *rel. compacte dans* $L^1(B_1)$. Si $m : B_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une limite,

$$|m| = 1 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot m = 0 \quad \text{dans } B_1.$$

Idée de preuve : $m_\varepsilon \xrightarrow{w^*} m$ dans L^∞ . **But** : $|m| = 1$ p.p.

Critère : $|m(0)| = 1 \iff \int_{B_R} |m| dx \rightarrow 1, R \rightarrow 0;$

Compacité locale

Théorème (I., Otto)

Si $m_\varepsilon : B_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1$ (sans (CL)) et

$$E_\varepsilon(m_\varepsilon, B_1) = \varepsilon \int_{B_1} |\nabla m|^2 + \frac{1}{2} \int_{B_1} |\nabla^{-\frac{1}{2}} \nabla \cdot m|^2 \leq \frac{C}{|\ln \varepsilon|},$$

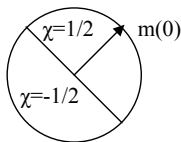
alors $\{m_\varepsilon\}$ rel. compacte dans $L^1(B_1)$. Si $m : B_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une limite,

$$|m| = 1 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot m = 0 \quad \text{dans } B_1.$$

Idée de preuve : $m_\varepsilon \xrightarrow{w^*} m$ dans L^∞ . But : $|m| = 1$ p.p.

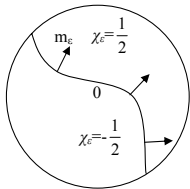
Critère : $|m(0)| = 1 \iff \int_{B_R} |m| dx \rightarrow 1, R \rightarrow 0;$

$$\iff \exists \chi : B_1 \rightarrow \{\pm \frac{1}{2}\} \text{ telle que}$$



$$\frac{1}{R^2} \int_{B_R} \chi m \cdot \nu dx \rightarrow 1, \quad \nu(x) = \frac{x}{|x|}.$$

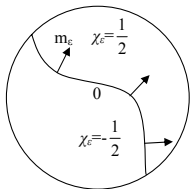
Comment construire la fonction χ ?



Regarder l'orbite de m_ϵ^\perp passant par 0 :

$$\begin{cases} \dot{X}_\epsilon(t) = m_\epsilon^\perp(X_\epsilon(t)), \\ X_\epsilon(0) = 0. \end{cases}$$

Comment construire la fonction χ ?



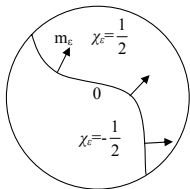
Regarder l'orbite de m_ϵ^\perp passant par 0 :

$$\begin{cases} \dot{X}_\epsilon(t) = m_\epsilon^\perp(X_\epsilon(t)), \\ X_\epsilon(0) = 0. \end{cases}$$

- $D\chi_\epsilon = m_\epsilon \mathcal{H}^1 \llcorner \{X_\epsilon\} = m_\epsilon |D\chi_\epsilon|.$

$$2r \leq \int_{B_r} |D\chi_\epsilon| = \int_{B_r} m_\epsilon \cdot D\chi_\epsilon = \int_{\partial B_r} \chi_\epsilon m_\epsilon \cdot \nu \, d\mathcal{H}^1 - \underbrace{\int_{B_r} \chi_\epsilon \nabla \cdot m_\epsilon \, dx}_{\text{petit}}.$$

Comment construire la fonction χ ?



Regarder l'orbite de m_ϵ^\perp passant par 0 :

$$\begin{cases} \dot{X}_\epsilon(t) = m_\epsilon^\perp(X_\epsilon(t)), \\ X_\epsilon(0) = 0. \end{cases}$$

- $D\chi_\epsilon = m_\epsilon \mathcal{H}^1 \llcorner \{X_\epsilon\} = m_\epsilon |D\chi_\epsilon|.$

$$2r \leq \int_{B_r} |D\chi_\epsilon| = \int_{B_r} m_\epsilon \cdot D\chi_\epsilon = \int_{\partial B_r} \chi_\epsilon m_\epsilon \cdot \nu \, d\mathcal{H}^1 - \underbrace{\int_{B_r} \chi_\epsilon \nabla \cdot m_\epsilon \, dx}_{\text{petit}}.$$

$\Rightarrow \{\chi_\epsilon\}$ borné dans $BV_{loc}(B_1)$ et χ une limite.

- $1 \leq \frac{1}{R^2} \int_0^R dr \int_{\partial B_r} \chi_\epsilon m_\epsilon \cdot \nu \, d\mathcal{H}^1 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{R^2} \int_{B_R} \chi m \cdot \nu \, dx.$

Etats d'énergie locale nulle

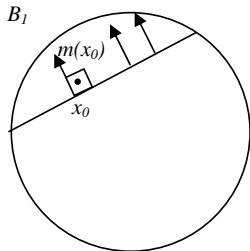
Théorème (I., Otto)

Si $m_\varepsilon : B_1 \rightarrow S^1$ et

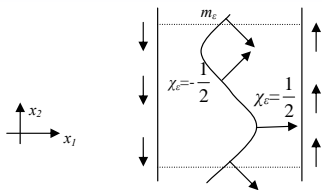
$$|\ln \varepsilon| E_\varepsilon(m_\varepsilon, B_1) \rightarrow 0,$$

alors toute limite $m : B_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est *loc. Lipschitz* dans B_1 et

$$m(x_0 + tm(x_0)^\perp) = m(x_0), x_0 \in B_1, t \in \mathbb{R}.$$

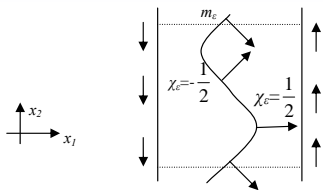


Preuve de l'optimalité de la paroi :



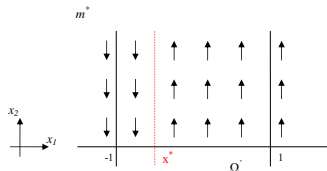
$m_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1$ avec (CL)
 m est L -périodique en x_2
 $|\ln \varepsilon| E_\varepsilon(m_\varepsilon, \mathbb{R} \times (0, L)) \leq \frac{\pi L}{2}.$

Preuve de l'optimalité de la paroi :

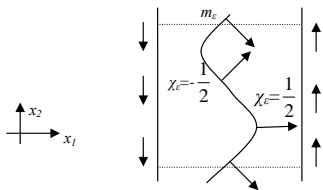


$m_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1$ avec (CL)
 m est L -périodique en x_2
 $|\ln \varepsilon| E_\varepsilon(m_\varepsilon, \mathbb{R} \times (0, L)) \leq \frac{\pi L}{2}$.

BUT : toute limite de $\{m_\varepsilon\}$ est une paroi verticale.



Preuve de l'optimalité de la paroi :

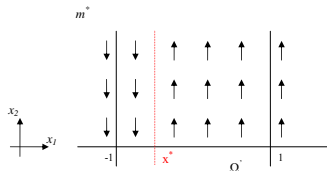


$$m_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \text{ avec (CL)}$$

$$m \text{ est } L\text{-périodique en } x_2$$

$$|\ln \varepsilon| E_\varepsilon(m_\varepsilon, \mathbb{R} \times (0, L)) \leq \frac{\pi L}{2}.$$

BUT : toute limite de $\{m_\varepsilon\}$ est une paroi verticale.



Idée : $|\ln \varepsilon| E_\varepsilon \xrightarrow{w^*} e, e(\mathbb{R} \times [0, L]) \leq \frac{\pi L}{2}$

et $\text{supp } e \subset \{x_1^*\} \times \mathbb{R}, x_1^* \in [-1, 1].$