

# **Autour des équations de Saint-Venant... et applications à l'océanographie côtière**

***Fabien Marche***

Mathématiques Appliquées de Bordeaux (IMB)

Département de Géologie et Océanographie,  
Bordeaux (EPOC)



Plage du Truc Vert , Octobre2001

# **Plan de la présentation**

**Motivations**

**I - Modélisation et analyse**

**II - Méthodes numériques**

**III - Quelques applications**

**IV - Travaux actuels**

**Conclusion**

# Introduction et motivations

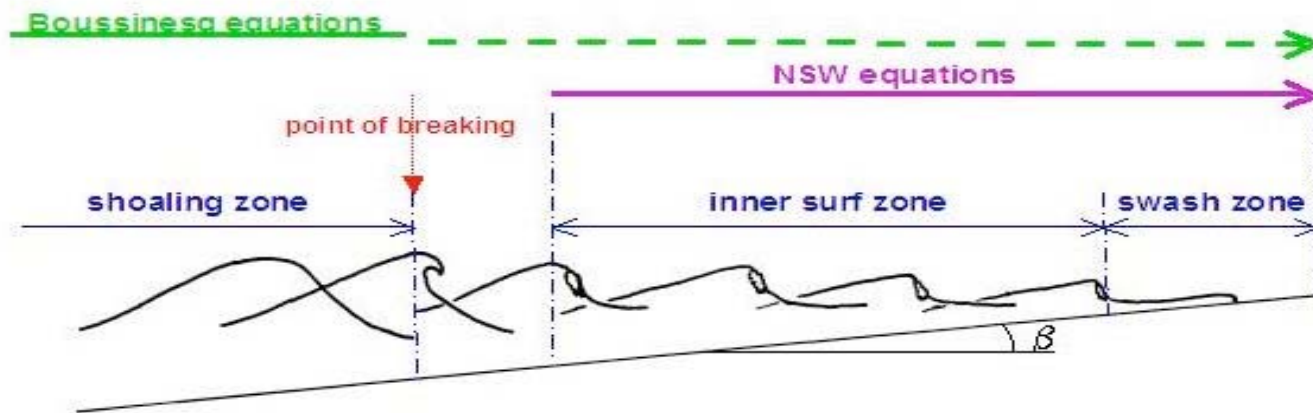
- ☛ Circulation des masses d'eau en zone côtière : transformations non-linéaires de la houle



- ☛ Enjeux importants :

- Evolution morpho-dynamique des côtes
- Transport et évolution de nappes de polluant
- Impact d'éventuels aménagements

# I - Introduction



- Méthodes Volumes-Finis (capture de chocs, précision au 2<sup>ème</sup> ordre)
  - Modèles 1DH cross-shore (SURF\_SV, *Bonneton et al., 2002*)
    - description précise de la ZSI
  - Modèles 2DH sur grille Cartésienne (méthode WAF, *Brocchini et al., 2001*)
- Modèles actuels non satisfaisants, en particulier pour:
  - Mouvements de la ligne d'eau en 2DH (*Lynett et al., 2002*)
  - Fortes variations de topographie (interactions houles/topographie, génération de macro-vortex, *Brocchini et al., 2002*)

## II – Modélisation et analyse

- Nouveau modèle bi-dimensionnel visqueux (asymptotique) (*Marche, Eur.J.Mech.B- Fluid, 2007*)

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \operatorname{div} (h\mathbf{u}) = 0 , \\ \partial_t (h\mathbf{u}) + \operatorname{div} (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + g h \nabla h = \\ -\alpha_0(h) \mathbf{u} - \alpha_1(h) h |\mathbf{u}| \mathbf{u} + \mu \operatorname{div} \left( h(\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) + (2h \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathcal{I} \right) \\ + \beta h \nabla \Delta h - f(h\mathbf{u})^\perp - g h \nabla d + -\beta h \nabla \Delta d . \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{u} = (u, v)$  et

$$\alpha_0(h) = \frac{k_t}{1 + \frac{k_t h}{3\mu}} , \quad \alpha_1(h) = \frac{k_t}{\left(1 + \frac{k_t h}{3\mu}\right)^2}$$

- Terme visqueux particulier (*ne rentre pas dans la classe de modèles introduits par Bresch et Desjardins (2002)*)
- Nouvelle formulation des termes de friction (*introduisant la viscosité*)
- Présence d'un terme dispersif, sous forme de tensions de surface

## II – Modélisation et analyse

### • Analyse du modèle: Cas de la dimension 1

*Existence et unicité de la solution faible globale (formulation variationnelle)  
avec les régularité suivante :*

- $h \in L^\infty(0, T; H_{per}^1(I)) \cap L^2(0, T; H_{per}^2(I)),$
- $u \in L^2(0, T; L_{per}^2(I)),$

*obtenues à partir de l'inégalité d'énergie classique*

$$\int_I \left( \frac{h_k^2}{2F_r^2} + \frac{h_k}{2} u_k^2 + \beta \frac{(\partial_x h_k)^2}{2} \right) + \int_0^t \int_I \alpha_0(h_k) u_k^2 + \int_0^t \int_I \alpha_1(h_k) h_k |u_k|^3$$

$$+ 3\nu \int_0^t \int_I h_k (\partial_x u_k)^2 \leq \int_I \left( \frac{h_0^2}{2F_r^2} + h_0 \frac{(u_0)^2}{2} + \beta \frac{(\partial_x h_0)^2}{2} \right) + \int_0^t \int_I h_k \tilde{f} u_k$$

*et l'inégalité supplémentaire :*

$$\frac{3}{2} \frac{d}{dt} \int_I \left( h_k \left( \frac{1}{3} u_k + \nu \partial_x \log h_k \right)^2 + \frac{h_k^2}{9F_r^2} + \beta \frac{(\partial_x h_k)^2}{9} \right) - \nu r_0 \frac{d}{dt} \int_I \log \left( r_0^{-1} h_k \alpha_0(h_k) \right)$$

$$+ \nu \int_I \alpha_0'(h_k) \partial_x h_k u_k + \nu \int_I \alpha_1(h_k) |u_k| u_k \partial_x h_k + \nu \beta \int_I (\partial_x^2 h_k)^2$$

$$+ \nu \int_I \frac{(\partial_x h_k)^2}{F_r^2} + \frac{1}{3} \int_I \alpha_0(h_k) u_k^2 + \frac{1}{3} \int_I \alpha_1(h_k) h_k |u_k|^3$$

$$\leq \nu \int_I h_k (\partial_x u_k)^2 + \frac{1}{3} \int_I \tilde{f} (h_k u_k + 3\nu \partial_x h_k)$$

## II – Méthodes numériques

## II – Modèle numérique

☛ Equations de Saint-Venant 2DH avec terme de topographie :

$$\mathbf{U}_{,t} + F(\mathbf{U})_{,x} + G(\mathbf{U})_{,y} = S(\mathbf{U}),$$
$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, F(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2}h^2 \\ huv \end{pmatrix}, G(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix}, S(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghd_x \\ -ghd_y \end{pmatrix}$$

Difficultés numériques:

◆ **Mouvements de la ligne d'eau**

- Domaine occupé par le fluide variant dans le temps
- Evolution rapide des propriétés de l'écoulement près de la ligne d'eau
- Extension 2DH délicate

◆ **Fortes variations de topographie**

- Les méthodes FSM classiques génèrent des oscillations non-physiques
- Résultats peu précis pour les états quasi-stationnaires (convergence, précision)
- Résultats peu précis pour le calcul des interactions entre ondes incidentes et topographie



## II – Modèle numérique

**Une approche du type « well-balanced » est nécessaire**

L'équilibre entre termes convectifs et terme de topographie est préservé pour les états stationnaires

Autorise le calcul des convergences et des faibles oscillations autour des états d'équilibres

L'extension des schémas « well-balanced » récents aux problèmes de mouvements de la ligne d'eau n'est pas triviale (*Greenberg and Leroux, 1996, Gallouët et al., 2003*)

**Une approche spécialement conçue pour l'étude de la propagation et du run-up d'ondes longues en zone littorale : le modèle SURF\_WB** (*Marche, Bonneton, Fabrie et Seguin, Int.J.Num.Meth.Fluids, 2007*)

- 1) Solveur de Riemann **VFRoe-ncv** (*variables non-conservatives*) pour lois de conservation homogènes, préservant la positivité de la hauteur d'eau à la ligne d'eau (*Gallouët et al., 2004 ; Marche et Berthon, soumis à SIAM J. Sci. Comp.*)
- 2) Propriétés « well-balanced »: **Méthode de Reconstruction Hydrostatique** (*Audusse et al., 2005, Noelle et al. 2006*)
- 3) Nouvel **algorithme** pour le calcul du découvrement/recouvrement
- 4) Reconstruction « well-balanced » au second ordre (*MUSCL-TVD, choix des variables à reconstruire et du limiteur de pente, schéma RK2-Heun en temps*)

## II – Modèle numérique

Discrétisation dans le cas 1D :

$$\frac{U_i^{n+1}(t) - U_i^n(t)}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left( F_{i+\frac{1}{2}}^{n,-} - F_{i-\frac{1}{2}}^{n,+} \right) = S_{c,i}^n$$

avec

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{n,-} = F_{i+\frac{1}{2}}^n + S_{i+\frac{1}{2}-}^n, \quad F_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} = F_{i+\frac{1}{2}}^n + S_{i+\frac{1}{2}+}^n,$$

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = F(U_{i+\frac{1}{2}}(0, U_{i+\frac{1}{2}-}^n, U_{i+\frac{1}{2}+}^n))$$

et  $U_{i+\frac{1}{2}}(0, U_{i+\frac{1}{2}-}^n, U_{i+\frac{1}{2}+}^n)$  est calculé avec le solveur de Riemann VFRoe-ncv, utilisant le changement de variable symétrisant:  $(h, u) \rightarrow (2c, u)$

La reconstruction hydrostatique est effectuée comme suit :

$$U_{i+\frac{1}{2}-} = \begin{pmatrix} h_{i+\frac{1}{2}-} \\ h_{i+\frac{1}{2}-} u_{i,r} \end{pmatrix}, \quad U_{i+\frac{1}{2}+} = \begin{pmatrix} h_{i+\frac{1}{2}+} \\ h_{i+\frac{1}{2}+} u_{i+1,l} \end{pmatrix}.$$

$$h_{i+\frac{1}{2}-} = \max(0, \underbrace{h_{i,r} + d_{i,r}}_{H_{i,r}} - d_{i+\frac{1}{2}}), \quad h_{i+\frac{1}{2}+} = \max(0, \underbrace{h_{i+1,l} + d_{i+1,l}}_{H_{i+1,l}} - d_{i+\frac{1}{2}})$$

$$d_{i+\frac{1}{2}} = \max(d_{i,r}, d_{i+1,l})$$

avec  $h_{i,l}, h_{i,r}, u_{i,l}, u_{i,r}, H_{i,l}$  and  $H_{i,r}$

issues d'une reconstruction linéaire TVD et:

$$d_{i,l} = H_{i,l} - h_{i,l}, \quad d_{i,r} = H_{i,r} - h_{i,r}$$

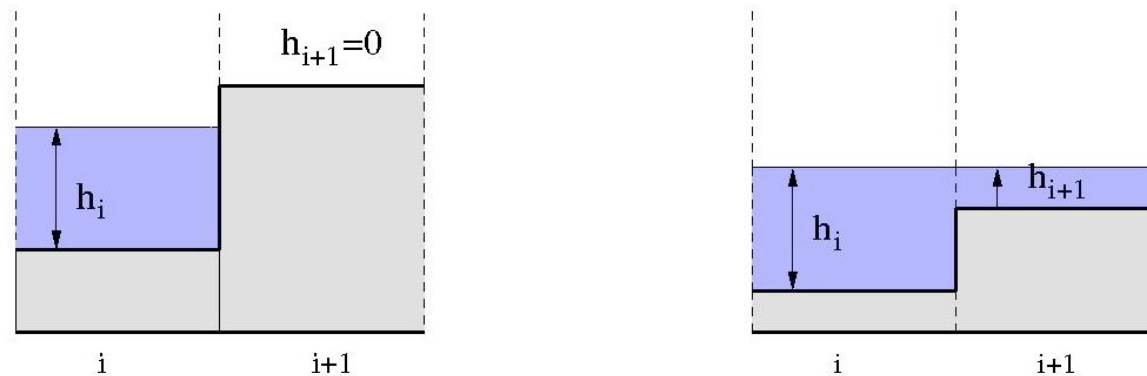
## II – Modèle numérique

Discrétisation du terme de topographie distribuée aux interfaces des cellules et discrétisation centrée additionnelle pour les propriétés « well-balanced » au 2e ordre et la consistance:

$$: \mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}-}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} h_{i+\frac{1}{2}-}^2 - \frac{g}{2} h_{i,r}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{i-\frac{1}{2}+} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} h_{i,l}^2 - \frac{g}{2} h_{i-\frac{1}{2}+}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{c,i} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \frac{h_{i,l} + h_{i,r}}{2} (d_{i,l} - d_{i,r}) \end{pmatrix}$$

Algorithme de découvrment/recouvrement très simple: introduction d'une hauteur d'eau limite  $h_{tol} = 10^{-10} \text{ m}$  pour la définition d'une cellule « sèche ».

3 configurations possibles (sec/sec, sec/mouillé, mouillé/mouillé) avec transitions transparentes:



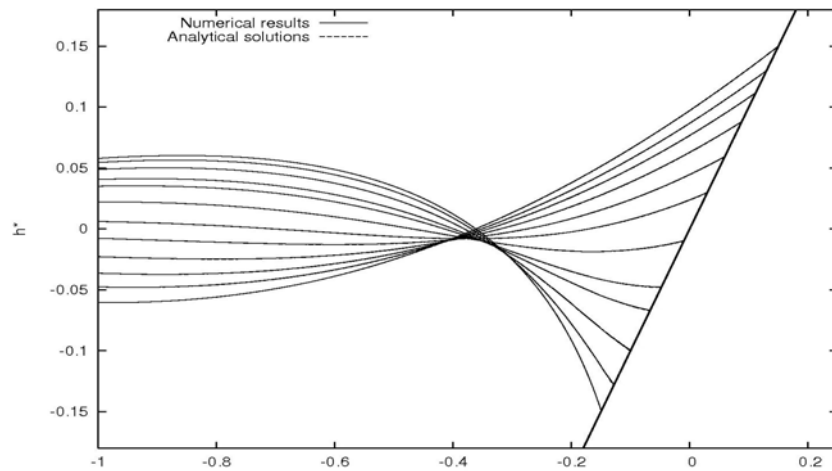
Le **point clé** est d'appliquer cet algorithme aux quantités  $h_{i+\frac{1}{2}-}$  et  $h_{i+\frac{1}{2}+}$  issues de la « reconstruction hydrostatique » au lieu d'utiliser les quantités naturelles  $h_i$  and  $h_{i+1}$

## II - Quelques validations...

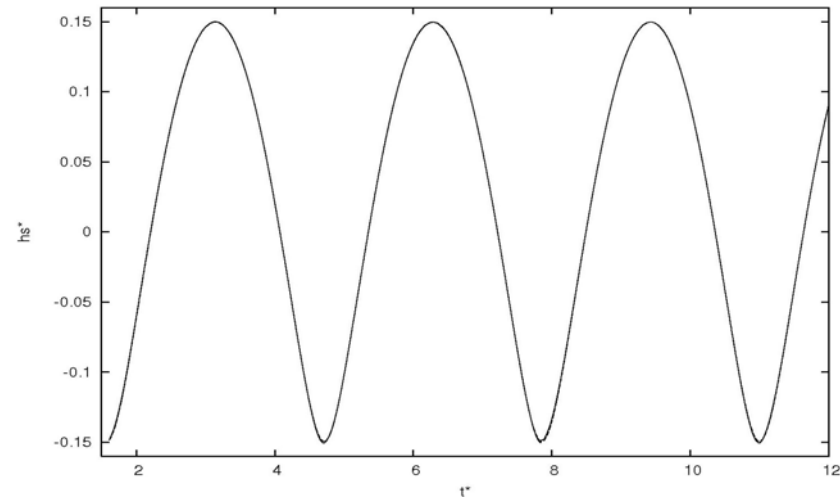
Comparaison avec la solution analytique 1DH de Carrier et Greenspan (1958):

Solution périodique :  $\Delta x = 0.05$  m, CFL = 0.8

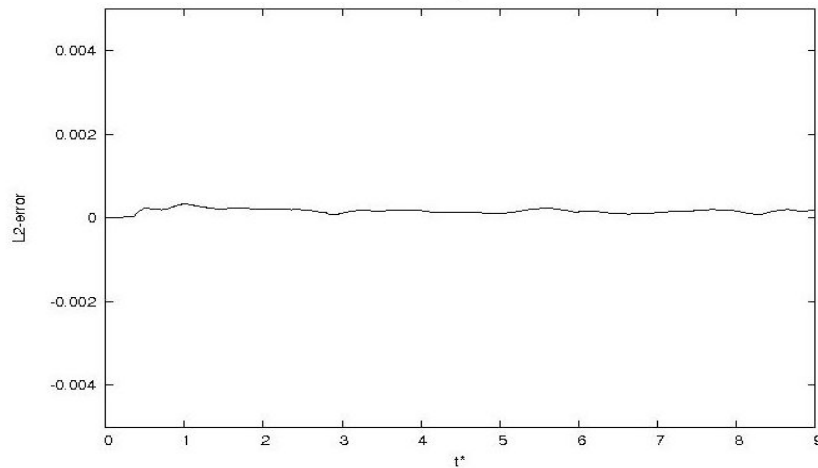
Surface libre à différents instants:



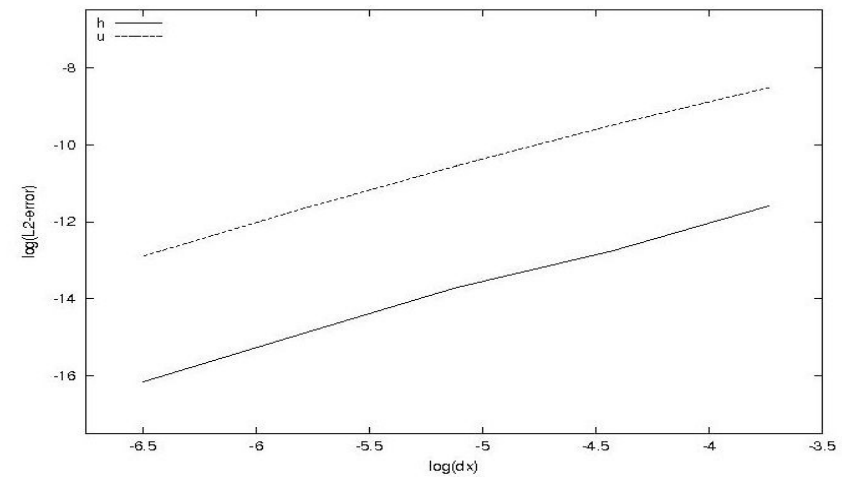
Mouvements de la ligne d'eau :



Erreur L2 sur la hauteur d'eau



Courbes de convergence pour h et u

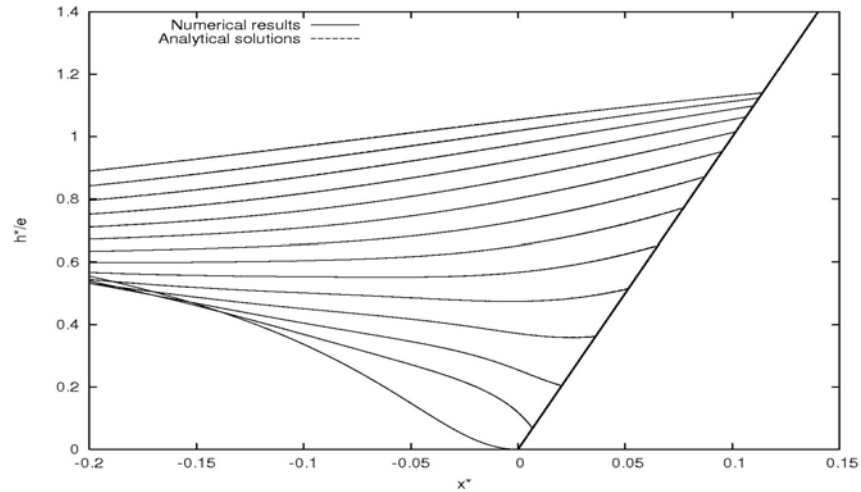


## II - Quelques validations... :

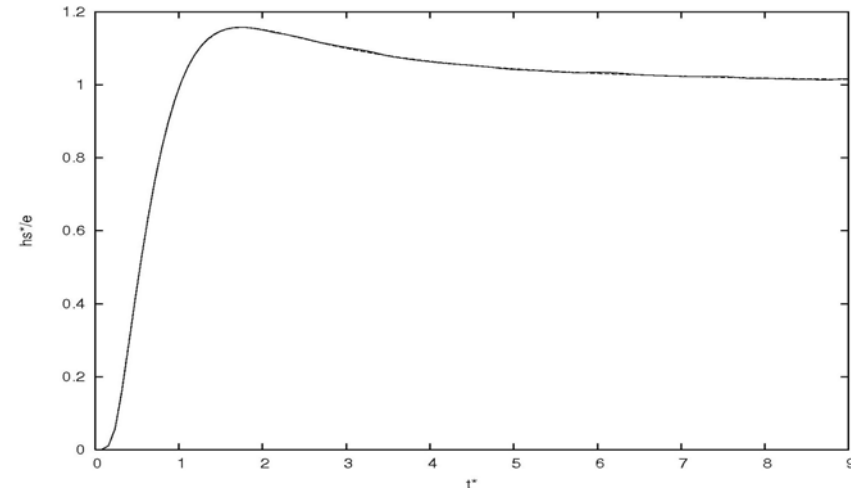
Comparaison avec la solution analytique 1DH de Carrier et Greenspan (1958):

Solution transitoire :  $\Delta x = 0.04$  m, CFL=0.8

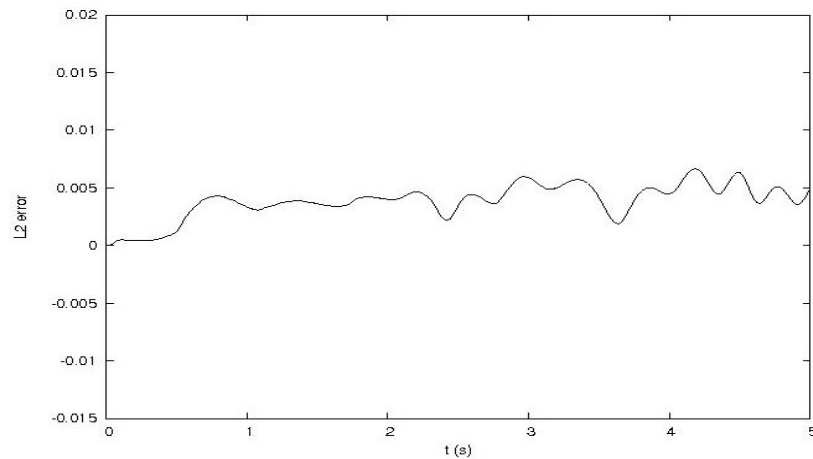
Surface libre à différents instants:



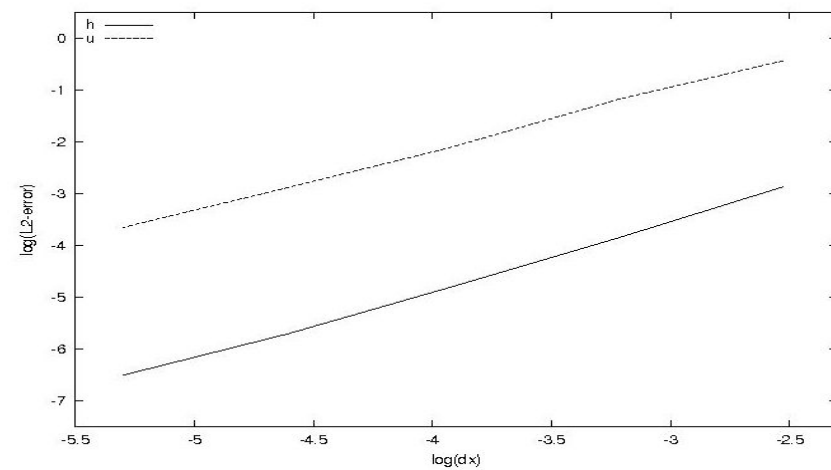
Mouvements de la ligne d'eau :



Erreur L2 sur la hauteur d'eau



Courbes de convergence pour h et u



## II - Quelques validations...

### Comparaison avec les solutions analytiques 2DH de Thacker (1981):

Solution incurvée (haut) et solution plane (bas) :  $\Delta x = \Delta y = 0.04$  m, CFL=0.8

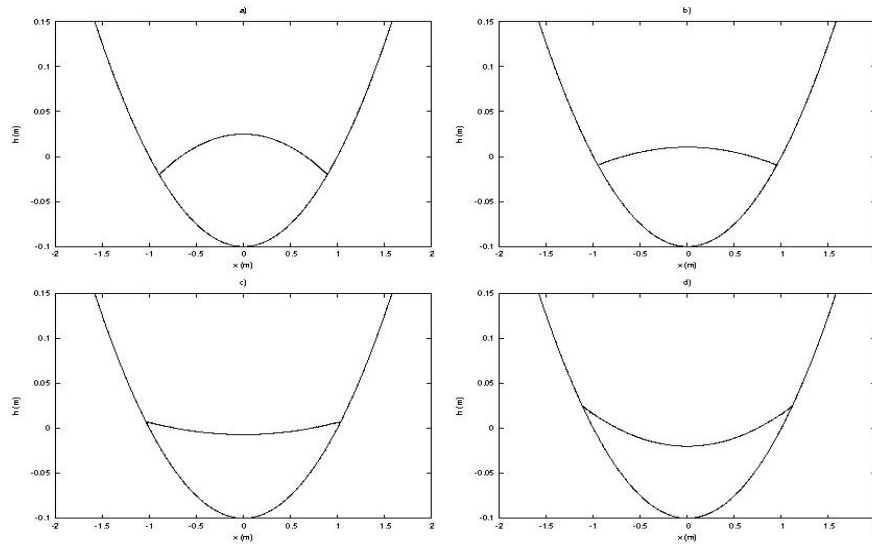


Figure 15. Thacker's curved solution. Comparison between numerical results (in solid lines) and analytical solution (in dotted lines) for the centerline free surface profile. Water surface elevation profiles  $h$  are plotted versus the  $x$  coordinate, for  $y = 0$ , for a)  $t=3T$ , b)  $t=3T+T/6$ , c)  $t=3T+T/3$ ,  $t=3T+T/2$ , where  $T$  is the oscillations period

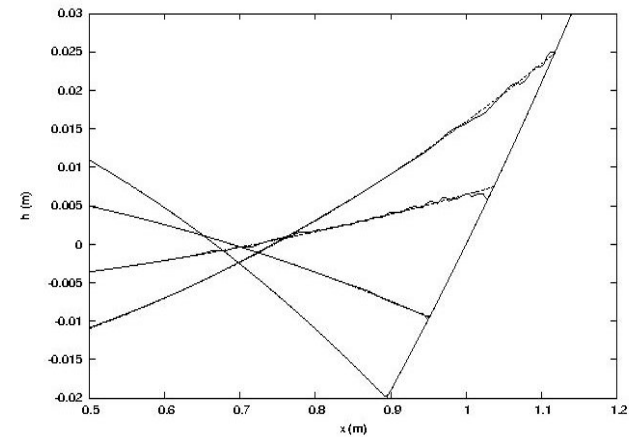


Figure 16. Thacker's curved solution. Zoomed centerline free surface profiles for the surface elevation, near the shoreline. Analytical and numerical profiles are plotted versus the  $x$  coordinate, for  $y = 0$  for different  $t=3T$ ,  $t=3T+T/6$ ,  $t=3T+T/3$ ,  $T=3T+T/2$ .

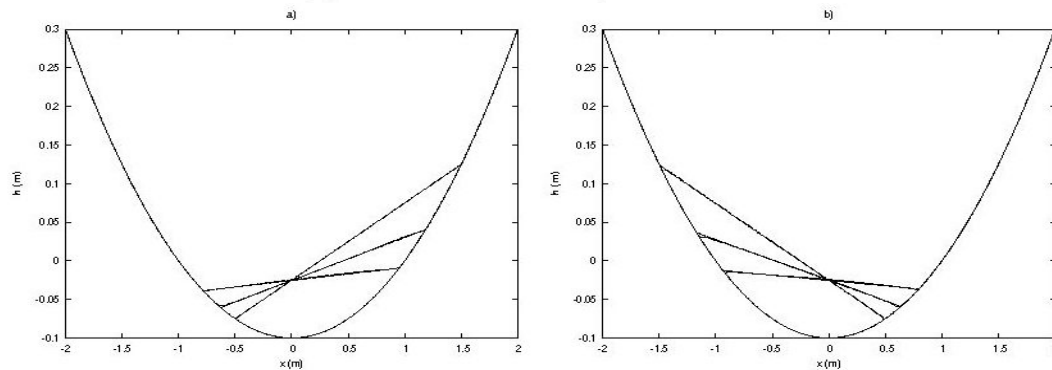
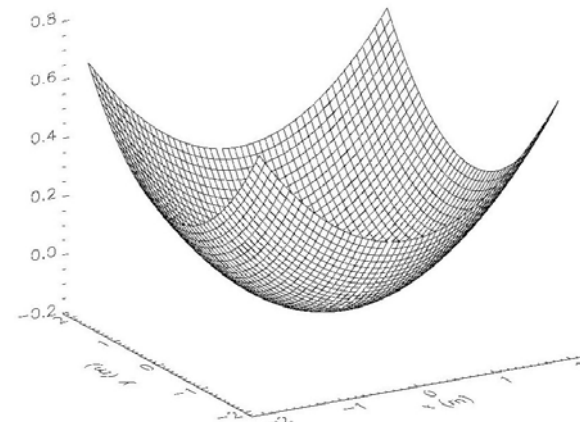


Figure 18. Thacker's planar solution. Comparison between numerical results (in solid lines) and analytical solution (in dotted lines). Centerline free surface profiles for the surface elevation  $h$  are plotted versus the  $x$  coordinate, for  $y = 0$ , at a)  $t=2T$ ,  $t=2T+T/6T$ ,  $t=2T+T/5T$  and b)  $t=2T+T/4$ ,  $t=2T+T/3$ ,  $t=2T+T/2$ .



### III – Modèle numérique – 2ème étape

**Discrétisation des processus dissipatifs dans une méthode de splitting adaptée:  
préserve la positivité et les états d'équilibres statiques**  
(Coriolis et tensions de surface négligés)

$$\begin{cases} \partial_t h = 0, \\ \partial_t (h\mathbf{u}) = -\alpha_0(h) \mathbf{u} - \alpha_1(h) h \mathbf{u} |\mathbf{u}| + 2\mu \operatorname{div} (hD(\mathbf{u})) + 2\mu \nabla (h \operatorname{div} \mathbf{u}). \end{cases}$$

**Méthode aux Différences-Finies semi-implicite :**

$$\begin{cases} h^{n+1} = h^*, \\ \frac{h^* \mathbf{u}^{n+1} - (h\mathbf{u})^*}{\Delta t} = -\alpha_0(h^*) \mathbf{u}^{n+1} - \alpha_1(h^*) h^* |\mathbf{u}^*| \mathbf{u}^{n+1} \\ \quad + 2\mu \operatorname{div} (h^* D(\mathbf{u}^*)) + 2\mu \nabla (h^* \operatorname{div} \mathbf{u}^*) \end{cases}$$

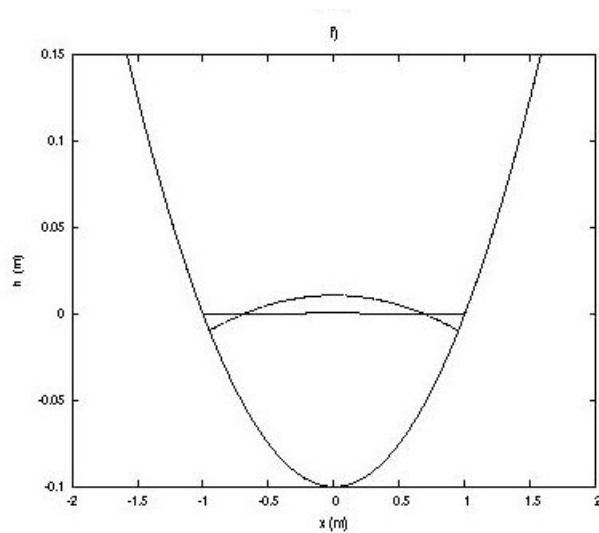
**La stabilité est contrôlée par le pas hyperbolique précédent...**

## II - Validations

### Validation qualitative avec le test de Thacker (1981) :

#### Mouvement de la ligne d'eau :

#### Profil de surface libre :



#### 1) Avec diffusion

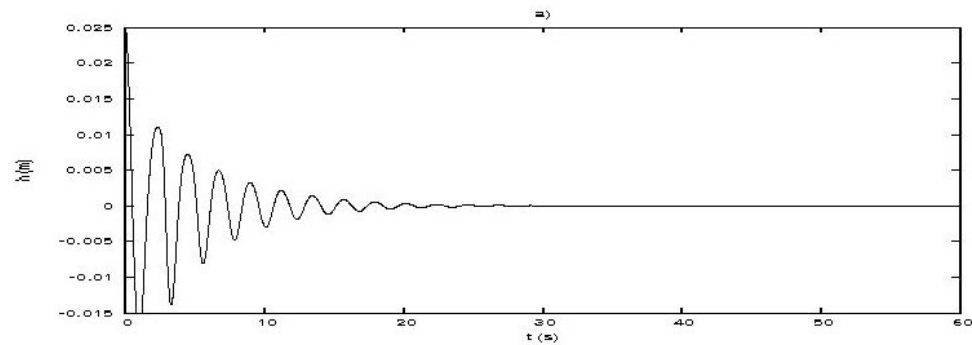


Figure 5.5.3. Thacker's 2D paraboloid solution with diffusion. Time series of the free surface profile at the center of the basin for  $\mu = 1$

#### 2) Avec friction

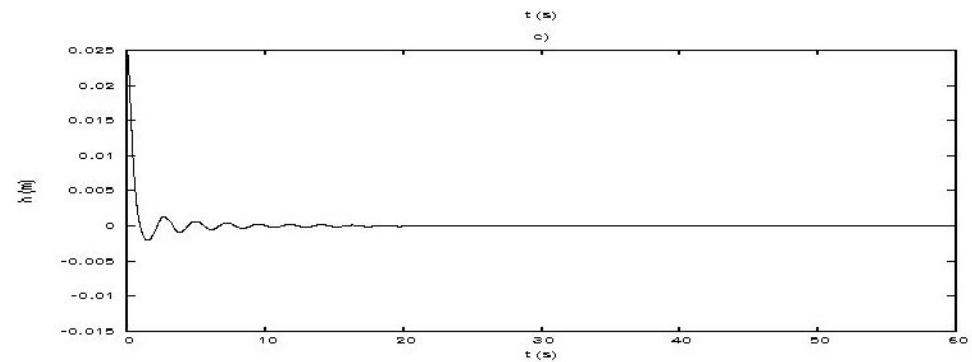


Figure 5.5.4. Thacker's 2D paraboloid solution with friction. Time series of the free surface profile at the center of the basin for different values of the friction coefficient  $k_t$ : a)  $k_t = 0.05$ , b)  $k_t = 0.1$ , c)  $k_t = 0.5$ .



# III – Applications

### III – Quelques applications

#### ☛ Run-up d'une onde solitaire autour d'une île conique (*Briggs et al. (1995)*)

Approche classique

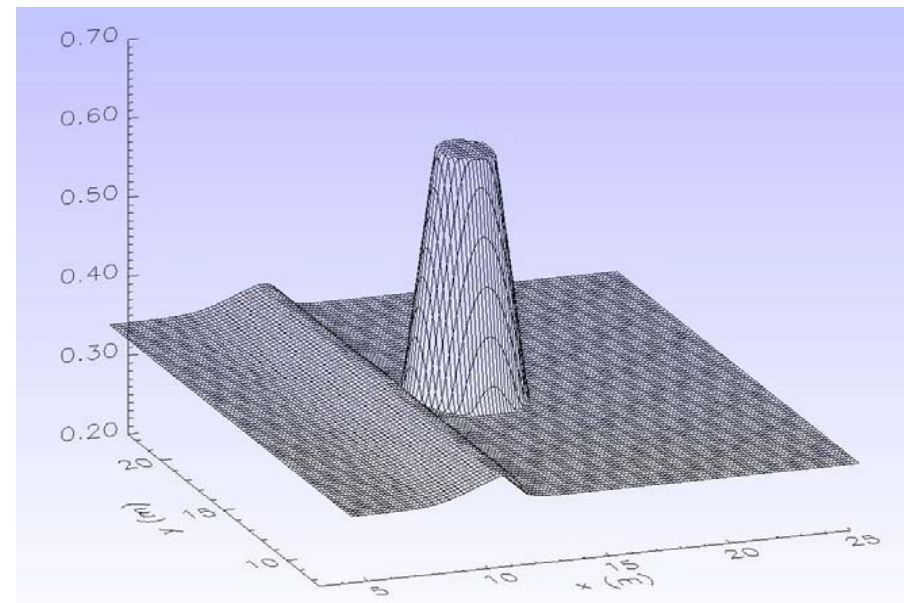
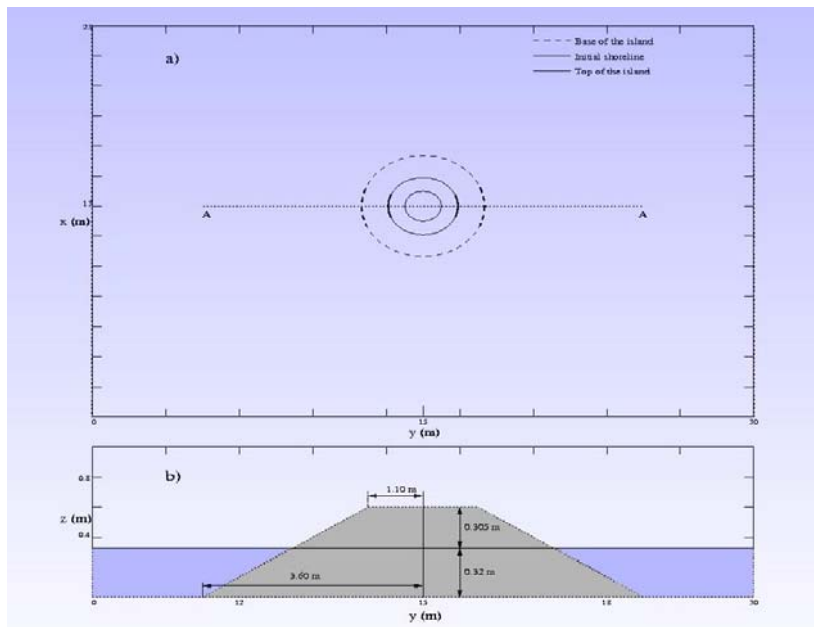
➡ Méthodes aux Différences-Finies (*Briggs et al. (1995)*)

➡ Méthodes aux Volumes-Finis avec FSM

Modèle SURF\_WB

➡ Capture des mouvements rapides et des ondes déferlées

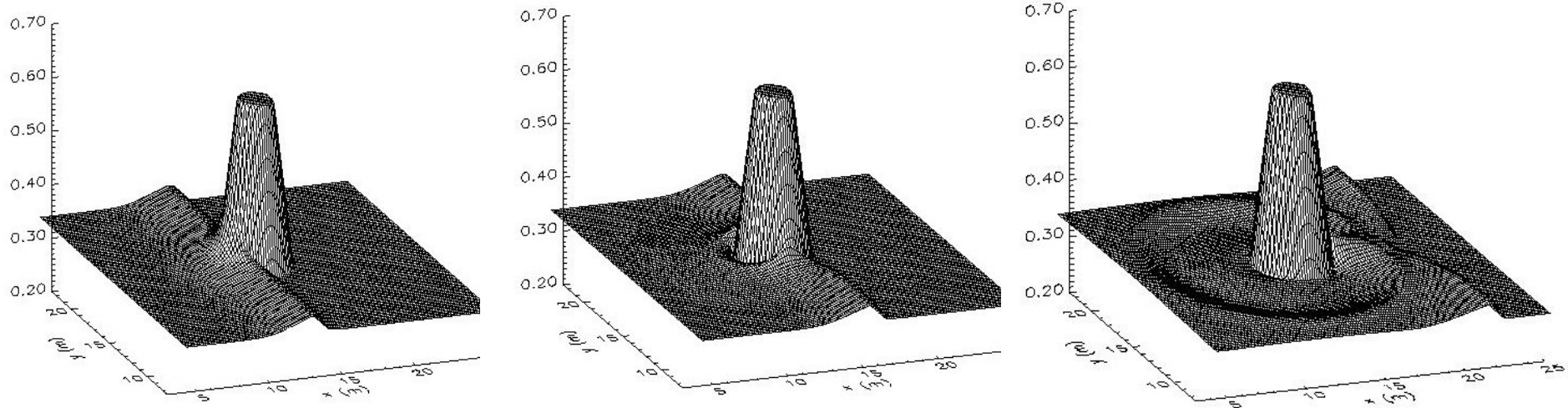
➡ Convergence vers l'état stationnaires au repos



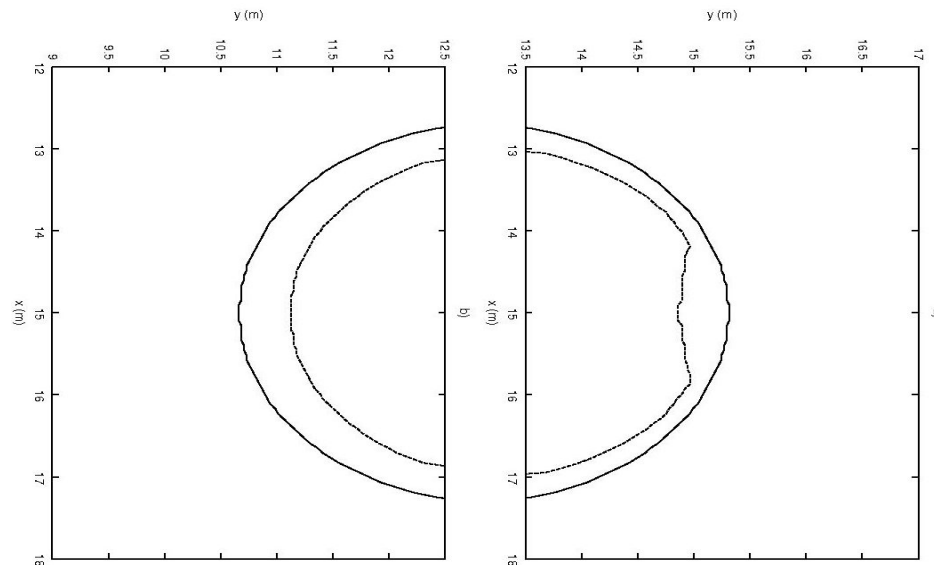
### III – Quelques applications

#### ☛ Run-up d'une onde solitaire autour d'une île cônique (*Briggs et al. (1995)*)

Evolution de la surface libre au cours de la propagation :



Run-up maximal calculé autour de l'île :

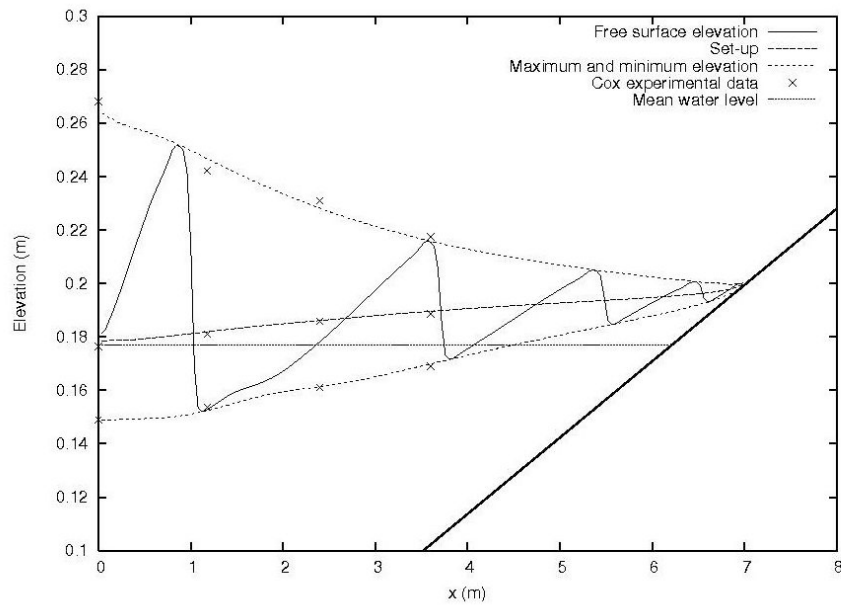


# III – Quelques applications

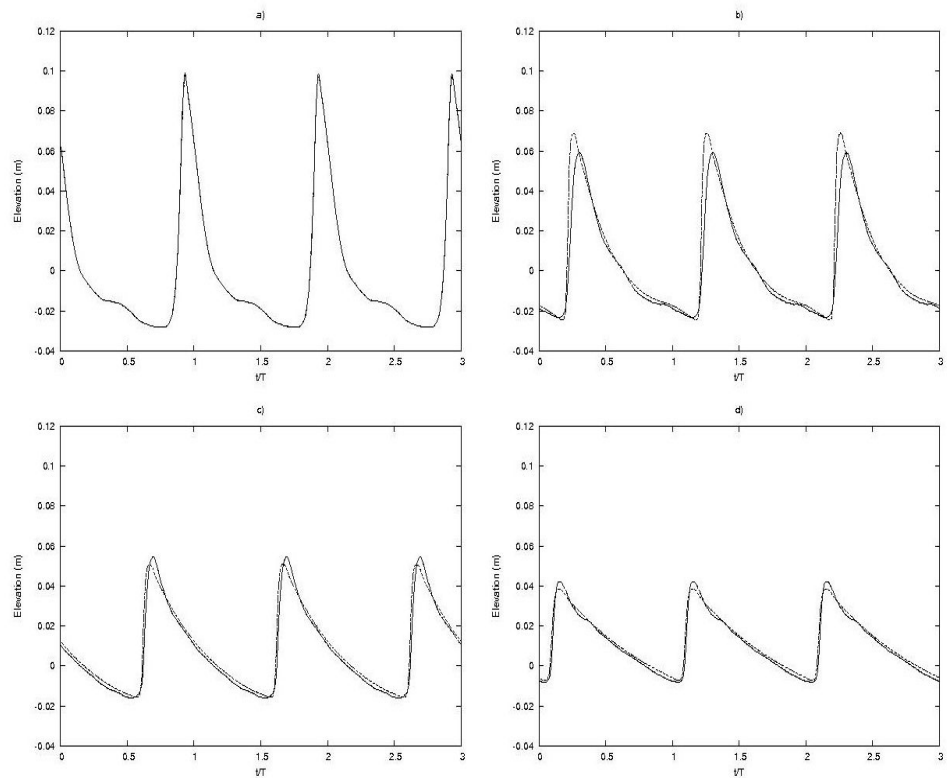
## ☛ Propagation d'ondes déferlées régulières dans la zone de surf :

Expérience de Cox (1995)

### Surface instantanée, élévation maxi/mini et set-up



### Variations temporelles de la Surface libre aux 4 sondes :



### III – Quelques applications

#### ☛ Etude numérique des courants moyens induits par les vagues

##### Approche classique chez les océanographes côtiers

- ⇒ Modèles intégrés dans le temps (*Svendson et Petruvu (1996)*)
- ⇒ Séparation des échelles entre vagues et courants, forçage au large pour « récupérer » les interactions non-linéaires...

##### Modèles instationnaires

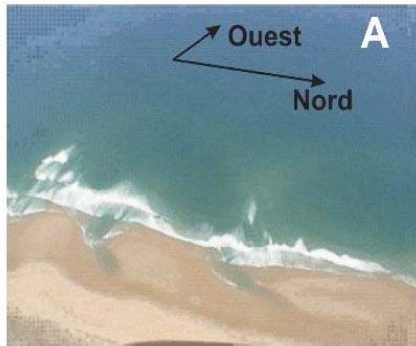
- ⇒ Très peu d'études, basées sur des modèles de type Boussinesq avec méthodes semi-empiriques et calibration de paramètres pour forcer le déferlement (*Sorensen et al. (1998), Chen et al. (1999)*)

##### Avantages des modèles instationnaires

- ⇒ Les interactions vagues/courants sont naturellement incluses dans le modèle
- ⇒ Accès à la dynamique instationnaire dans la zone de surf (vitesse et vorticité instantanées)
- ⇒ Saint-Venant 2DH: pas de méthodes empiriques ni de paramètres à calibrer pour forcer le déferlement
- ⇒ Saint-Venant 2DH: raidissement prématuré des fronts d'ondes

### III – Quelques applications

#### Etude des courants moyens induits par les vagues : système de barre/baïne



- Condition initiale :

$$h(0, x, y) = h_0, \mathbf{u}(0, x, y) = 0$$

- Condition limite à la frontière offshore:

onde monochromatique d'incidence normale avec  $T=12s$  et  $A=1m$

- Conditions de marées : dans cette

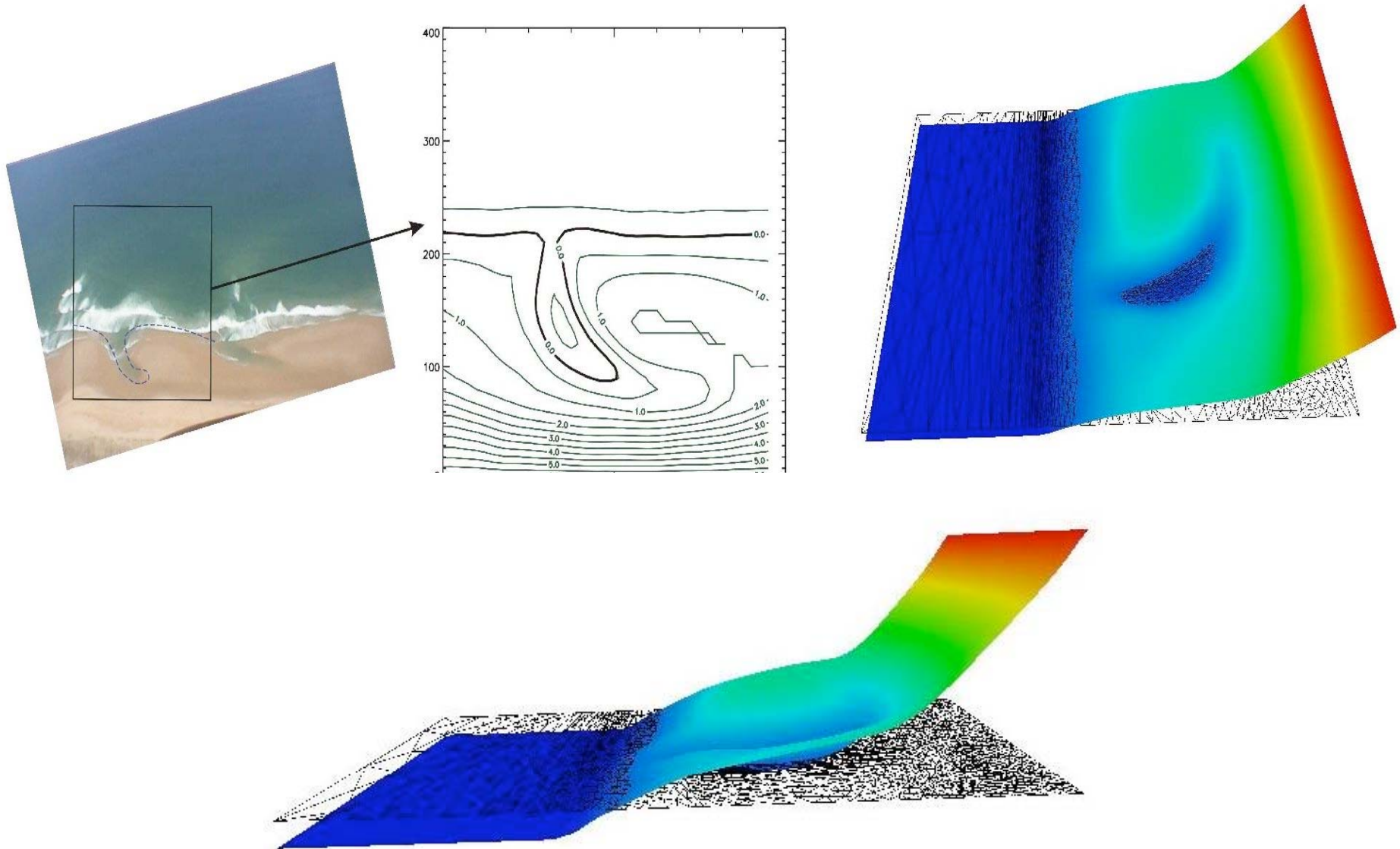
simulation,  $h_0$  peut varier entre 1 et 3 m.

- Conditions aux limites latérales périodiques

➡ Convergence vers un état quasi-stationnaire après approx. 80 périodes

### III – Quelques applications

Topographie utilisée pour le système de barre/baine :



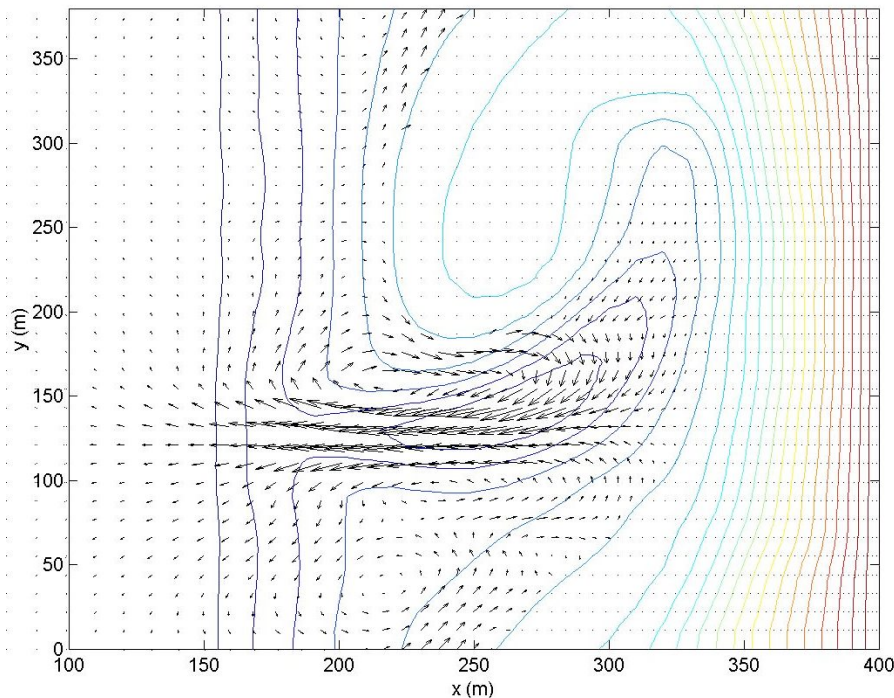
### III – Quelques applications

Etude des courants moyens induits par les vagues: système de barre/baïne

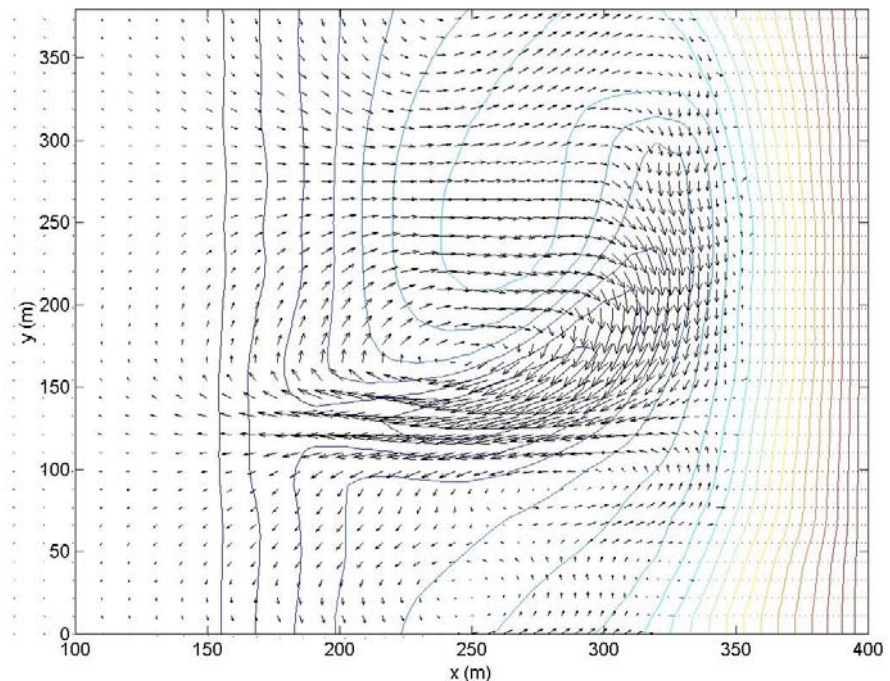
$\Delta x$  variable entre 0.05 m et 2m, CFL=0.6

Vitesses moyennes pour différents niveaux de marée :

$h_0 = 1\text{ m}$



$h_0 = 2\text{ m}$



• Les variations de topographie génèrent un courant sagittal étroit et dirigé vers le large, en sortie du chenal de baïne, associé à une large cellule de circulation.

• L'intensité du courant est maximale à mi-marée, en accord avec les observations in-situ

$U_{\max} = 0.7\text{ m/s}$  (Castelle et al. (2004))



## IV – Travaux actuels

## IV – Travaux actuels

### ☛ Limitations de SURF\_WB pour les simulations côtières:

- Effets dispersifs non pris en compte (pb de raidissement prématuré des vagues, pas de “levée”)

➡ Nécessité d'étendre les méthodes développées aux systèmes de type Boussinesq

- Manque de précision pour le calcul de la macro-vorticité générée par le déferlement des houles en zone de surf

➡ Montée en précision : ordre 3/ordre 4 nécessaire pour suivre l'évolution temporelle des structures

- Temps de calcul important pour les “grosses” simulations

➡ Optimisation / parallélisation  
Adaptation de maillage ?

## IV – Travaux actuels

- Extension vers un schéma well-balanced d'ordre 4 gérant le découvrement/recouvrement

- 1) Recontruction MUSCL-TVD ou WENO à l'ordre 4
- 2) Adaptation de la limitation/stabilisation pour les reconstructions non-conservatives et pour préserver la positivité (Marche et Berthon, soumis à SIAM, J. Sc. Comp.)
- 3) Formule de quadrature pour le terme source (Noelle et al., 2006)

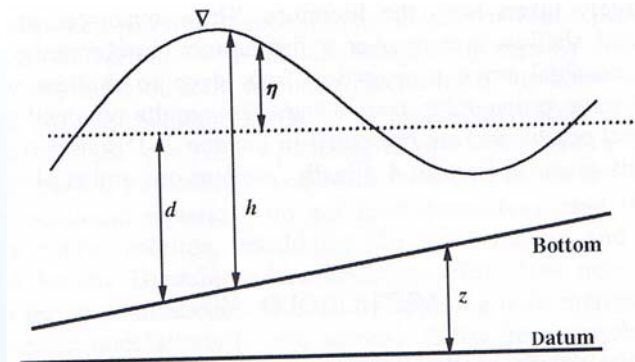
- Modèle de Madsen et Sørensen (1992): faiblement dispersif, pas de non-linéarités et bonne description du shoaling linéaire

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right) = gh \frac{\partial z}{\partial x} + \psi_x.$$

avec

$$\psi_x = \left( B + \frac{1}{3} \right) d^2 \left( \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial t} \right) + Bgd^3 \left( \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right) - d \frac{\partial z}{\partial x} \left( \frac{1}{3} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} + 2Bgd \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)$$



## IV – Travaux actuels

- **Approche** : préserver la capture de choc et introduire les effets dispersifs au même pas de temps...
- **Etude de stabilité linéaire** : nécessité d'introduire un traitement implicite pour la hauteur d'eau
- **Schéma proposé**: approche hybride VF/DF avec prédicteur – correcteur

Prédicteur pour la hauteur d'eau 
$$h_i^{(n+1)} = h_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( p_{i+\frac{1}{2}}^{pred} - p_{i-\frac{1}{2}}^{pred} \right)$$

Calcul implicite de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned} p_i^{n+1} = & p_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \sigma_{i+\frac{1}{2}}^{(n+1)} - \sigma_{i-\frac{1}{2}}^{(n+1)} \right) + \left( B + \frac{1}{3} \right) d_i^2 \left( \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} - \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right)_i^n \right) \\ & + \frac{d_i}{3} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_i^n \left( \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_i^{n+1} - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_i^n \right) \\ & + \Delta t B g d_i^3 \left( \left( \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right)_i^n + 2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_i^n \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)_i^n \right) \end{aligned}$$

Correcteur pour la hauteur d'eau

$$h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( p_{i+\frac{1}{2}}^{corr} - p_{i-\frac{1}{2}}^{corr} \right)$$

- Schéma très diffusif en pratique!

## V - Conclusions

- Introduction d'un nouveau modèle de Saint-Venant bi-dimensionnel avec terme de viscosité et de tension de surface
- Implémentation d'un nouveau modèle numérique, rapide et robuste, pour les simulations incluant des mouvements 2DH de la ligne d'eau au-dessus de topographies variables  $\Rightarrow$  amélioration de l'état de l'art
- Outils prometteur pour l'étude de la zone d'impact associée à des ondes longues (tsunamis) ainsi que de la dynamique instationnaire en zone de surf interne

Poursuite des travaux : modèles de type Boussinesq