

# Limites asymptotiques et résultats numériques pour le système d'Euler-Poisson

Ingrid Violet

Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand  
violet@math.univ-bpclermont.fr

23/03/2007

# Présentation du système

## Euler-Poisson uni-polaire

$$\begin{aligned}
 n_t + \operatorname{div}(nu) &= 0 \\
 \varepsilon \partial_t(nu) + \varepsilon \operatorname{div}(nu \otimes u) + \nabla p(n) &= n \nabla V - \frac{\varepsilon nu}{\tau} \\
 -\lambda^2 \Delta V &= C(x) - n
 \end{aligned}$$

## Inconnues

- $n(t, x)$  : densité d'électrons
- $u(t, x)$  : vitesse des électrons
- $V(t, x)$  : potentiel électrostatique

## Paramètres physiques (a-dimensionnés)

- $\varepsilon$  : masse d'électrons
- $\tau$  : temps de relaxation
- $\lambda$  : longueur de Debye

## Données

- $p$  : fonction pression (ex :  $p(s) = cs^\gamma$ )
- $C(x)$  : profil de dopage ou densité des ions

## Euler-Poisson uni-polaire

$$n_t + \operatorname{div}(nu) = 0$$

$$\varepsilon \partial_t(nu) + \varepsilon \operatorname{div}(nu \otimes u) + \nabla p(n) = n \nabla V - \frac{\varepsilon nu}{\tau}$$

$$-\lambda^2 \Delta V = C(x) - n$$

## Inconnues

- $n(t, x)$  : densité d'électrons
- $u(t, x)$  : vitesse des électrons
- $V(t, x)$  : potentiel électrostatique

## Paramètres physiques (a-dimensionnés)

- $\varepsilon$  : masse d'électrons
- $\tau$  : temps de relaxation
- $\lambda$  : longueur de Debye

## Données

- $p$  : fonction pression (ex :  $p(s) = cs^\gamma$ )
- $C(x)$  : profil de dopage ou densité des ions

## Euler-Poisson uni-polaire

$$\begin{aligned}
 n_t + \operatorname{div}(nu) &= 0 \\
 \varepsilon \partial_t(nu) + \varepsilon \operatorname{div}(nu \otimes u) + \nabla p(n) &= n \nabla V - \frac{\varepsilon nu}{\tau} \\
 -\lambda^2 \Delta V &= C(x) - n
 \end{aligned}$$

## Inconnues

- $n(t, x)$  : densité d'électrons
- $u(t, x)$  : vitesse des électrons
- $V(t, x)$  : potentiel électrostatique

## Paramètres physiques (a-dimensionnés)

- $\varepsilon$  : masse d'électrons
- $\tau$  : temps de relaxation
- $\lambda$  : longueur de Debye

## Données

- $p$  : fonction pression (ex :  $p(s) = cs^\gamma$ )
- $C(x)$  : profil de dopage ou densité des ions

## Euler-Poisson uni-polaire

$$\begin{aligned}
 n_t + \operatorname{div}(nu) &= 0 \\
 \varepsilon u_t + \varepsilon(u \cdot \nabla)u + \frac{1}{n} \nabla p(n) &= \nabla V - \frac{\varepsilon u}{\tau} \\
 -\lambda^2 \Delta V &= C(x) - n
 \end{aligned}$$

## Inconnues

- $n(t, x)$  : densité d'électrons
- $u(t, x)$  : vitesse des électrons
- $V(t, x)$  : potentiel électrostatique

## Paramètres physiques (a-dimensionnés)

- $\varepsilon$  : masse d'électrons
- $\tau$  : temps de relaxation
- $\lambda$  : longueur de Debye

## Données

- $p$  : fonction pression (ex :  $p(s) = cs^\gamma$ )
- $C(x)$  : profil de dopage ou densité des ions

## Euler-Poisson uni-polaire

$$\begin{aligned}
 n_t + \operatorname{div}(nu) &= 0 \\
 \varepsilon u_t + \varepsilon(u \cdot \nabla)u + \frac{1}{n} \nabla p(n) &= \nabla V - \frac{\varepsilon u}{\tau} \\
 -\lambda^2 \Delta V &= C(x) - n
 \end{aligned}$$

## Inconnues

- $n(t, x)$  : densité d'électrons
- $u(t, x)$  : vitesse des électrons
- $V(t, x)$  : potentiel électrostatique

## Paramètres physiques (a-dimensionnés)

- $\varepsilon$  : masse d'électrons
- $\tau$  : temps de relaxation
- $\lambda$  : longueur de Debye

## Données

- $p$  : fonction pression (ex :  $p(s) = cs^\gamma$ )
- $C(x)$  : profil de dopage ou densité des ions

# Problème stationnaire

## Inconnues

- $n(x)$  : densité d'électrons
- $u(x)$  : vitesse des électrons
- $V(x)$  : potentiel électrostatique

## Paramètres physiques (a-dimensionnés)

- $\varepsilon$  : masse d'électrons
- $\tau$  : temps de relaxation
- $\lambda$  : longueur de Debye

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(nu) &= 0 \\ \varepsilon(u \cdot \nabla)u + \nabla h(n) &= \nabla V - \frac{\varepsilon u}{\tau} \\ -\lambda^2 \Delta V &= C(x) - n \end{aligned}$$



# Problème stationnaire

## Inconnues

- $n(x)$  : densité d'électrons
- $u(x)$  : vitesse des électrons
- $V(x)$  : potentiel électrostatique

## Paramètres physiques (a-dimensionnés)

- $\varepsilon$  : masse d'électrons
- $\tau$  : temps de relaxation
- $\lambda$  : longueur de Debye

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(nu) &= 0 \\ \varepsilon(u \cdot \nabla)u + \nabla h(n) &= \nabla V - \frac{\varepsilon u}{\tau} \\ -\lambda^2 \Delta V &= C(x) - n \end{aligned}$$

avec  $h$  : enthalpie du système :  $h'(n) = p'(n)/n$  et  $h(1) = 0$ .

# Système étudié

## Hypothèse : Flot irrotationnel

- $\text{rot } u = 0$
- il existe un potentiel vitesse  $\psi$  tel que  $u = -\nabla\psi$

$$\varepsilon(u \cdot \nabla)u + \nabla h(n) = \nabla V - \frac{\varepsilon u}{\tau}$$

$$\implies \nabla \left( \frac{\varepsilon}{2} |\nabla\psi|^2 + h(n) \right) = \nabla \left( V + \frac{\varepsilon\psi}{\tau} \right)$$

# Système étudié

## Hypothèse : Flot irrotationnel

- $\text{rot } u = 0$
- il existe un potentiel vitesse  $\psi$  tel que  $u = -\nabla\psi$

$$\begin{aligned}
 -\text{div}(n\nabla\psi) &= 0, \\
 \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\psi|^2 + h(n) &= V + \frac{\varepsilon\psi}{\tau}, \\
 -\lambda^2\Delta V &= C(x) - n, \quad \text{dans } \Omega
 \end{aligned}$$

+ conditions aux bords de type Dirichlet :

$$n = n_D, \quad \psi = \psi_D \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega$$

## Résultats existants

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div}(n\nabla\psi) &= 0, \\
 \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\psi|^2 + h(n) &= V + \varepsilon\psi, \\
 -\lambda^2\Delta V &= C(x) - n, & \text{dans } \Omega \\
 n = n_D, \psi &= \psi_D & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega
 \end{aligned}$$

## Résultats existants

- ❑ **Degond/Markowich, '93** : existence et unicité de solutions avec conditions de petitesse sur les données aux bords.
- ❑ **Peng, '03** :
  - ❑ Condition de petitesse des données remplacée par une condition de petitesse sur  $\varepsilon$ .
  - ❑ Limite de masse d'électrons : convergence en  $O(\varepsilon)$  pour un développement asymptotique d'ordre 0.
  - ❑ Limite de quasi-neutralité : convergence en  $O(\lambda^2)$  pour un développement asymptotique d'ordre 0 de la solution **sous une condition de compatibilité** et dans des espaces **plus faibles** que pour l'existence de solutions.

# Pourquoi les conditions de petitesse ?

## Elimination de $V$ :

$$-\Delta h(n) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 n}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\varepsilon}{n} F(\partial n, \partial^2 \psi, \partial \psi) + \frac{1}{\lambda^2} (n - C(x)) = \varepsilon Q(\partial^2 \psi),$$

$$-\operatorname{div}(n \nabla \psi) = 0, \quad \text{dans } \Omega,$$

$$n = n_D, \quad \psi = \psi_D, \quad \text{sur } \Gamma = \partial \Omega.$$

## Remarque :

Première équation **elliptique**  $\iff |\nabla \psi| < \sqrt{p'(n)/\varepsilon} \iff$  flot **subsonique**.

# Limite de masse d'électrons

## Rappel du système

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(n_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon) &= 0, \\ \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \psi_\varepsilon|^2 + h(n_\varepsilon) &= V_\varepsilon + \varepsilon \psi_\varepsilon, \\ -\Delta V_\varepsilon &= C(x) - n_\varepsilon, \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

## Conditions limites

$$n_\varepsilon = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \bar{n}_k + n_{D,\varepsilon}^{m+1}, \quad \psi_\varepsilon = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \bar{\psi}_k + \psi_{D,\varepsilon}^{m+1}, \quad \text{sur } \Gamma.$$

## Développements asymptotiques

On considère le développement suivant :

$$n_{a,\varepsilon} = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k n_k, \quad \psi_{a,\varepsilon} = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \psi_k, \quad V_{a,\varepsilon} = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k V_k,$$

Identification des puissances de  $\varepsilon \implies$  systèmes vérifiés par  $(n_k, \psi_k, V_k) \forall k$ .

## Rappel du système

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(n_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon) &= 0, \\ \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \psi_\varepsilon|^2 + h(n_\varepsilon) &= V_\varepsilon + \varepsilon \psi_\varepsilon, \\ -\Delta V_\varepsilon &= C(x) - n_\varepsilon, \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

## Conditions limites

$$n_\varepsilon = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \bar{n}_k + n_{D,\varepsilon}^{m+1}, \quad \psi_\varepsilon = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \bar{\psi}_k + \psi_{D,\varepsilon}^{m+1}, \quad \text{sur } \Gamma.$$

## Développements asymptotiques

⇒ **Solution approchée à l'ordre m :**

$$n_{a,\varepsilon}^m = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k n_k, \quad \psi_{a,\varepsilon}^m = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \psi_k, \quad V_{a,\varepsilon}^m = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k V_k,$$

où  $(n_k, \psi_k, V_k)$  sont solutions des systèmes déterminés précédemment pour  $1 \leq k \leq m$ .



## Rappel du système

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(n_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon) &= 0, \\ \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \psi_\varepsilon|^2 + h(n_\varepsilon) &= V_\varepsilon + \varepsilon \psi_\varepsilon, \\ -\Delta V_\varepsilon &= C(x) - n_\varepsilon, \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

## Conditions limites

$$n_\varepsilon = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \bar{n}_k + n_{D,\varepsilon}^{m+1}, \quad \psi_\varepsilon = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \bar{\psi}_k + \psi_{D,\varepsilon}^{m+1}, \quad \text{sur } \Gamma.$$

## Hypothèses

- (H1)  $\Omega$  convexe fermé borné de frontière régulière,
- (H2)  $p, C$  assez régulières et  $C$  minorée par une constante strictement positive,
- (H3)  $\bar{n}_k, \bar{\psi}_k$  assez régulières et  $\bar{n}_0$  minorée par une constante strictement positive sur  $\Gamma$ ,
- (H4)  $n_{D,\varepsilon}^{m+1} = O(\varepsilon^{m+1})$  et  $\psi_{D,\varepsilon}^{m+1} = O(\varepsilon^{m+1})$  dans les espaces d'existence de solutions.

## Théorème : [Peng/V. 05]

- (H1)-(H4)
- $n_{a,\varepsilon}^m = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k n_k$ ,  $\psi_{a,\varepsilon}^m = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \psi_k$ ,  $V_{a,\varepsilon}^m = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k V_k$ , la solution approchée

Alors la solution approchée existe et est unique (chaque profil existe et est unique) et il existe  $\varepsilon_2 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$  :

$$\|n_\varepsilon - n_{a,\varepsilon}^m\|_{\mathcal{W}^{2,q}(\Omega)} \leq A\varepsilon^{m+1}, \quad \|\psi_\varepsilon - \psi_{a,\varepsilon}^m\|_{\mathcal{C}^{2,\delta}(\bar{\Omega})} \leq A\varepsilon^{m+1}$$

et

$$\|V_\varepsilon - V_{a,\varepsilon}^m\|_{\mathcal{C}^{1,\delta}(\bar{\Omega})} \leq A\varepsilon^{m+1},$$

avec  $A$  une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

# Limite de quasi-neutralité

## Rappel du système

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div}(n_\lambda \nabla \psi_\lambda) &= 0, \\
 \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \psi_\lambda|^2 + h(n_\lambda) &= V_\lambda + \varepsilon \psi_\lambda, \\
 -\lambda^2 \Delta V_\lambda &= C(x) - n_\lambda, & \text{dans } \Omega, \\
 n_\lambda &= n_D, \quad \psi_\lambda = \psi_D & \text{sur } \Gamma.
 \end{aligned}$$

## Principales difficultés

Sans la condition de compatibilité :

- il y a **apparition de couches limites**,
- on ne connaît **pas l'existence et l'unicité** d'une suite de solutions du problème.

## Rappel du système

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(n_\lambda \nabla \psi_\lambda) &= 0, \\ \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \psi_\lambda|^2 + h(n_\lambda) &= V_\lambda + \varepsilon \psi_\lambda, \\ -\lambda^2 \Delta V_\lambda &= C(x) - n_\lambda, \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

## Conditions limites

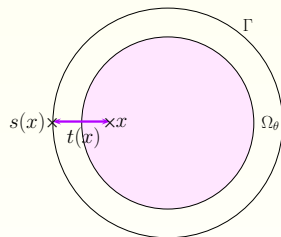
$$n_\lambda = \sum_{j=0}^m \lambda^j n_D^j + n_{D,\lambda}^m, \quad \psi_\lambda = \sum_{j=0}^m \lambda^j \psi_D^j + \psi_{D,\lambda}^m, \quad \text{sur } \Gamma.$$

## Hypothèses

- (H1)  $C$  régulière et bornée par des constantes strictement positives,
- (H2)  $n_D^j$  et  $\psi_D^j$  assez régulières pour tout  $0 \leq j \leq m$ ,
- (H3)  $n_{D,\lambda}^m = O(\lambda^{m-1})$  et  $\psi_{D,\lambda}^m = O(\lambda^{m-1})$  dans les bons espaces,
- (H4)  $n_D^0(x) = C(x)$ ,  $n_D^1(x) = 0$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $m \geq 2$ .

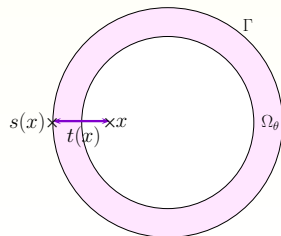
## Construction des développements asymptotiques

## Développement interne :



$$n_{I,m}^\lambda = \sum_{k=0}^m \lambda^k n_k$$

## Développement externe :



$$n_{I,m}^\lambda + \tilde{n}_{B,m}^\lambda = n_{I,m}^\lambda + \sum_{k=0}^m \lambda^k \tilde{n}_k^b,$$

$\tilde{n}_k^b(s, \xi)$  exponentiellement décroissante quand  $\xi \rightarrow \infty$ ,  
avec  $\xi(x, \lambda) = t(x)/\lambda$ .

**Théorème :** Existence et unicité du développement asymptotique [V. 05]

- (H1)-(H4)

Alors il existe un unique développement asymptotique d'ordre  $m$ , suffisamment régulier, de la forme :

$$(n_\lambda^a, \psi_\lambda^a, V_\lambda^a) = (n_{I,m}^\lambda + n_{B,m}^\lambda, \psi_{I,m}^\lambda + \psi_{B,m}^\lambda, V_{I,m}^\lambda + V_{B,m}^\lambda), \text{ dans } \bar{\Omega},$$

tel que :

$$n_\lambda^a = n_0 + \sum_{j=2}^m \lambda^j (n_j + n_j^b),$$

$$\psi_\lambda^a = \psi_0 + \lambda \psi_1 + \lambda^2 \psi_2 + \sum_{j=3}^m \lambda^j (\psi_j + \psi_j^b) + \lambda^{m+1} \psi_{m+1}^b,$$

$$n_\lambda^a = \sum_{k=0}^m \lambda^k n_D^k, \quad \psi_\lambda^a = \sum_{k=0}^m \lambda^k \psi_D^k \quad \text{sur } \Gamma.$$

**Rappel de (H4) :**

$$n_D^0(x) = C(x), \quad n_D^1(x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad m \geq 2.$$

## Théorème : Existence et convergence [V. 05]

- (H1)-(H4)

Alors pour  $\lambda$  assez petit, il existe  $\varepsilon_3 > 0$  indépendant de  $\lambda$  tel que pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_3]$ , le problème ait une solution  $(n_\lambda, \psi_\lambda, V_\lambda) \in \mathcal{W}^{2,q}(\Omega) \times \mathcal{C}^{2,\delta}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\delta}(\bar{\Omega})$  qui vérifie :

$$\begin{aligned} \|n_\lambda - n_\lambda^a\|_{W^{2,q}(\Omega)} &\leq A\lambda^{m-1}, \quad \|\psi_\lambda - \psi_\lambda^a\|_{C^{2,\delta}(\bar{\Omega})} \leq A\lambda^{m-1}, \\ \|V_\lambda - V_\lambda^a\|_{C^{1,\delta}(\bar{\Omega})} &\leq A\lambda^{m-1}, \end{aligned}$$

où  $A$  est une constante indépendante de  $\lambda$ .

## Remarque :

L'hypothèse (H4) ( $n_D^0(x) = C(x)$ ,  $n_D^1(x) = 0$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $m \geq 2$ ) est **cruciale**.



# Principales étapes de la preuve

- **Elimination de  $V$  :**

$$\begin{aligned}
 & -\operatorname{div}(n\nabla\psi) = 0 \\
 \Delta h(n) - \frac{\varepsilon}{n} F_1(\partial^2 n, \partial n, \partial^2 \psi, \partial \psi) - \frac{1}{\lambda^2} (n - C) + \varepsilon Q(\partial^2 \psi) &= 0
 \end{aligned}$$

- **Forme de la solution cherchée :**

$$\begin{aligned}
 n_\lambda &= n_\lambda^a + \lambda^{m-1} r_\lambda, \\
 \psi_\lambda &= \psi_\lambda^a + \lambda^{m-1} p_\lambda
 \end{aligned}$$

- **Système en  $r_\lambda, p_\lambda$**
- **Théorème de point fixe de Schauder**

# Simulations numériques

## Rappel du système

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(n\nabla\psi) &= 0, \\ \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\psi|^2 + h(n) &= V + \varepsilon\psi, \\ -\Delta V &= C(x) - n, \quad \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

+ conditions aux bords de type Dirichlet-Neumann

## But

Retrouver numériquement la condition de petitesse sur  $\varepsilon$   
ou sur les données aux bords.

## Rappel du système

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(n\nabla\psi) &= 0, \\ \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\psi|^2 + h(n) &= V + \varepsilon\psi, \\ -\Delta V &= C(x) - n, \quad \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

+ conditions aux bords de type Dirichlet-Neumann

## Rappel du système

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(n\nabla\psi) &= 0, \\ \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\psi|^2 + h(n) &= V + \varepsilon\psi, \\ -\Delta V &= C(x) - n, \quad \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

+ conditions aux bords de type Dirichlet-Neumann

## Rappel du système

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(n\nabla\psi) &= 0, \\ \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\psi|^2 + h(n) &= V + \varepsilon\psi, \\ -\Delta V &= C(x) - n, \quad \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

+ conditions aux bords de type Dirichlet-Neumann

⇒ SCHEMA ITERATIF

## Schéma itératif

- On se donne  $n^0$ . Pour  $m \geq 0$  on résout :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(n^m \nabla \psi^m) &= 0, \\ -\Delta V^m &= C - n^m, && \text{dans } \Omega \\ V^m &= V_D, \quad \psi^m = \psi_D, && \text{sur } \Gamma_D \\ \nabla V^m \cdot \nu &= \nabla \psi^m \cdot \nu = 0, && \text{sur } \Gamma_N \end{aligned}$$

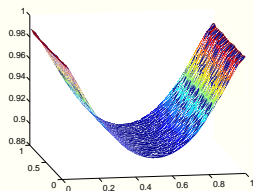
$\implies$  Schéma volumes finis  $\implies$  solutions constantes par mailles

- Calcul de  $n^{m+1}$  par :

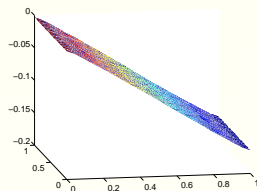
$$n^{m+1} = h^{-1} \left( V^m - \varepsilon \psi^m + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \psi^m|^2 \right)$$

$\implies$  Reconstruction du gradient de  $\psi^m$  ?

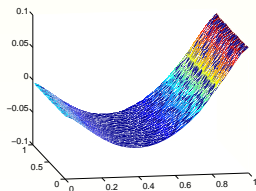
□ Droniou/Eymard, '05

Diode ballistique (Schéma DE,  $\gamma = 1$ ,  $\varepsilon = 0.6$ ,  $V_D = 0.1$ )

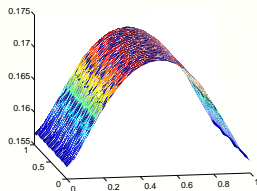
Densité d'électrons



Potentiel de vitesse



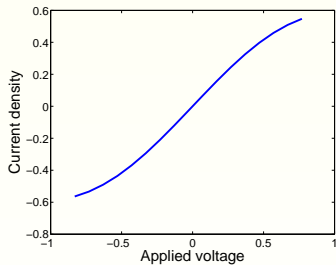
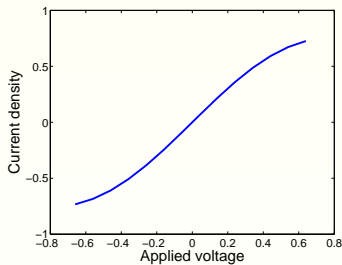
Potentiel électrostatique



Vitesse des électrons



## Courbes courant/tension (Schéma DE)

Cas  $\gamma = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $-0.83 \leq V_D \leq 0.83$ Cas  $\gamma = 1$ ,  $\varepsilon = 0.6$ ,  $-0.66 \leq V_D \leq 0.66$ 

# Conclusions et perspectives

## Conclusions :

- **Limite de masse d'électrons** : convergence en  $O(\varepsilon^{m+1})$  pour un développement asymptotique d'ordre  $m$ .
- **Existence de solutions et limite de quasi-neutralité dans le cas d'apparition d'une couche limite** : convergence en  $O(\lambda^{m-1})$  pour un développement asymptotique d'ordre  $m$ ,  $m \geq 2$  dans les mêmes espaces que ceux d'existence de solutions.
- **Simulation numérique** : on retrouve la condition de petitesse sur  $\varepsilon$  ou sur les données aux bords pour l'existence de solutions.  
Application des schémas au cas d'une diode ballistique et à l'étude des courbes courant/tension.

# Conclusions et perspectives

## Conclusions :

- **Limite de masse d'électrons** : convergence en  $O(\varepsilon^{m+1})$  pour un développement asymptotique d'ordre  $m$ .
- **Existence de solutions et limite de quasi-neutralité dans le cas d'apparition d'une couche limite** : convergence en  $O(\lambda^{m-1})$  pour un développement asymptotique d'ordre  $m$ ,  $m \geq 2$  dans les mêmes espaces que ceux d'existence de solutions.
- **Simulation numérique** : on retrouve la condition de petitesse sur  $\varepsilon$  ou sur les données aux bords pour l'existence de solutions.  
Application des schémas au cas d'une diode ballistique et à l'étude des courbes courant/tension.

## Perspectives :

- Limite de quasi-neutralité sans conditions de compatibilité;
- Etude numérique de la limite de quasi-neutralité.